Känguru 2022 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Es gibt hier mehrere Möglichkeiten, welches die beiden Apps sind, die er nur halb so lang verwendet hat. Wir bezeichnen die Apps von oben nach unten als „erste“ bis „vierte“ und nehmen an, jede der strichlierten Linien steht für eine Stunde, d. h. in der Vorwoche wurden die Apps 3, 2, 2 bzw. 1 Stunde verwendet.

halb so lang verwendete Apps	**neue Verwendungdauern**	**das entspricht Diagramm**
erste und zweite	1,5 1 2 1	(C)
erste und dritte	1,5 2 1 1	(C)
erste und vierte	1,5 2 2 0,5	(B)
zweite und dritte	3 1 1 1	(A)
zweite und vierte	3 1 2 0,5	(D)
dritte und vierte	3 2 1 0,5	(D)

Somit kann **Diagramm (E)** nicht auftreten.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

In diesem Fall kann man **Diagramm (E)** auch ganz schnell direkt ausschließen: Die erste, zweite und dritte App sind hier gleich lang verwendet wie in der ersten Woche, nur die vierte halb so lang.

Würde man mathematisch einen ganz präzisen Beweis führen wollen, dass das nicht möglich ist (der vielleicht auch bei 400 Apps funktioniert, von denen die ersten 399 Zeilen identisch sind), müsste man jetzt noch argumentieren, dass Zeilen beim Halbieren immer nur nach unten rutschen, und deswegen wenn die ersten k Zeilen identisch sind, es sich auch um dieselben k Apps wie in der Vorwoche handeln muss (wobei wir Apps mit derselben Dauer als nicht unterscheidbar betrachten, es uns also egal ist, ob die erste oder zweite 2-Stunden-App halbiert wurde).

Mit dieser Beobachtung im Gepäck kann man nun aber umgekehrt von einem Diagramm leicht auf die beiden halbierten Apps zurückschließen, ohne alle Zweierkombinationen halbierter Apps auszuprobieren. Wenn wir zum Beispiel Diagramm (A) betrachten, ist die erste Zeile identisch zur Vorwoche, also wurde die 3-Stunden-App nicht halbiert. Die zweite Zeile ist verschieden, also wurden alle 2-Stunden-Apps halbiert, und wir sind fertig. Mit dieser Methode könnte man auch aus zwei Listen mit je 400 Apps ganz schnell herausfinden, welche zwei nur halb so lang verwendet wurden.

All das ist für diese Aufgabe nicht nötig, soll aber eine kleine Anregung und Einladung sein, dass man selbst aus einer banal erscheinenden Aufgabe schnell einmal ein paar interessante Herangehensweisen ableiten kann. Die Aufgabe ist damit ein guter erster Einstieg in mathematische Beweisführung.

2. Es gilt $1000 : 13 \approx 76.9$ und $100 : 13 \approx 7.69$, also sind $76 - 7 =$ **69** dreiziffrige Zahlen durch 13 teilbar. (Die kleinste ist $8 \cdot 13 = 104$, die größte $76 \cdot 13 = 988$.)

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Falls man ein paar schöne Zahlen auswendig weiß, braucht man die aufwändige Division $1000 : 13 \approx 76.9$ nicht per Hand durchführen, sondern erinnert sich vielleicht an $77 \cdot 13 = 1001$. Daraus folgt ebenfalls sofort, dass es 76 Zahlen kleiner als 1000 gibt, die durch 13 teilbar sind.

3. Wir wissen aus den Angaben von allen Personen, ob sie älter oder jünger als Bella sind: Teddy und Lily sind älter als sie, Charly ist jünger. Also können nur **Teddy und Lily** gleich alt sein.

4. Es gilt $2022 : 6 = 337$, $2023 : 7 = 289$, $2024 : 8 = 253$, $2025 : 9 = 225$, $\mathbf{2027 : 11 \approx 184{,}3}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Statt direkt zu dividieren, kann man sich die eine oder andere Teilbarkeitsregel zu Nutze machen:

Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist. 2022 ist gerade und somit durch 2 teilbar. Außerdem ist jede Zahl genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist, und die Ziffernsumme von 2022 ist 6, also durch 3 teilbar. (Dadurch, dass der Teiler laut Angabe bereits genau die Ziffernsumme ist, ergibt sich die Teilbarkeit bei dieser Regel von selbst.)

Dasselbe gilt für die Teilbarkeitsregel durch 9: Jede Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist, also ist $2025 : 9$ sicher ganzzahlig.

Für die Teilbarkeit durch 8 können wir nutzen, dass, wenn a und b beide durch c teilbar sind, dann auch $a + b$ durch c teilbar ist. Für 2000 und 24 ist jeweils ganz leicht nachzurechnen, dass sie durch 8 teilbar sind, also ist auch $2000 + 24 = 2024$ durch 8 teilbar.

Für die Teilbarkeit durch 11 betrachten wir die „alternierende Quersumme“, also eine Ziffernsumme, wo wir vor jede zweite Ziffer ein Minus schreiben. Für 2027 erhalten wir so $2 - 0 + 2 - 7 = -3$, was nicht durch 11 teilbar ist, und somit auch 2027 nicht.

Einzig die Teilbarkeitsregeln für 7 sind alle etwas komplizierter zu merken. Die „alternierende 3er-Quersumme“ erählt man, indem man 2023 aufspaltet in 2 und $023 = 23$ und mit $2 - 23 = -21$ eine durch 7 teilbare Zahl erhält. Alternativ ergibt die Regel „(alles bis auf letzte zwei Ziffern)$\cdot 2+$(letzte zwei Ziffern)“ $20 \cdot 2 + 23 = 63$, was wiederum durch 7 teilbar ist.

5. $5^8 : 25 = 5^8 : 5^2 = 5^{8-2} = 5^6 = 5^{2 \cdot 3} = (5^2)^3 = \mathbf{25^3}$

6. Wir wissen, dass $15 = 3 \cdot 5$. Unter den 10 Ziffern müssen also die Primfaktoren 3 und 5 jeweils genau ein Mal vorkommen, und keine anderen Primfaktoren dürfen auftreten. Keine Ziffer kann gleichzeitig durch 3 und 5 teilbar sein, da die kleinste solche Zahl 15 keine Ziffer im Zehnersystem ist. Also muss es eine Ziffer 3 und eine Ziffer 5 in der Zahl geben. Alle acht anderen Ziffern dürfen keine Primfaktoren enthalten, müssen also gleich 1 sein. Das ergibt eine Ziffernsumme von $3 + 5 + 8 \cdot 1 = \mathbf{16}$.

7. Wenn zwei gleich große Kreise einander schneiden, entsteht ein symmetrisches Bild (mit der Verbindungsgeraden der beiden Schnittpunkte als Symmetrieachse), also sind die beiden Kreisbögen, die den Überlappungsbereich einschließen, genau gleich lang. Der Umfang des grauen Bereichs ist daher genau gleich lang wie der Umfang des mittleren Kreises, also $2r\pi = \mathbf{2\pi}$ wegen $r = 1$.

8. 2, 20, 22, 200, 202, **220**, 222, 2000, 2002, 2020, 2022

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Ein bisschen strategischer, als alles aufzuschreiben (vor allem bei großen Zahlen) ist folgende Herangehensweise, die gleichzeitig einen kleinen Ausflug in das Fachgebiet der Informatik darstellt:

   Wir bestimmen zunächst die Anzahl der Zahlen mit k Ziffern, die man nur mit den Ziffern 0 und 2 schreiben kann. An der ersten Stelle muss 2 stehen, bei allen weiteren hat man die freie Wahl zwischen zwei Optionen. Folglich gibt es 2^{k-1} solche Zahlen.

   Es gibt also $2^{1-1} = 1$ einstellige solche Zahlen (nämlich nur die Zahl 2), $2^{2-1} = 2$ zweistellige, $2^{3-1} = 4$ dreistellige und $2^{4-1} = 8$ vierstellige.

   Von den vierstelligen interessieren uns nur jene bis 2022; das sind 4 Stück, da die erste Stelle 2 sein muss, die zweite 0, und die restlichen beiden jeweils frei zwischen zwei Optionen gewählt werden können.

   Insgesamt hat unsere Liste daher $1+2+4+4 = 11$ Elemente, das mittlere ist also das sechste. Da $1+2 < 6$ ist und $1 + 2 + 4 > 6$, suchen wir eine dreistellige Zahl, und zwar wegen $6 - (1 + 2) = 3$ die dritte solche Zahl.

   Nun können wir recht leicht die ersten drei dreistelligen Zahlen aufschreiben. Man könnte aber auch so überlegen: Die erste solche Zahl endet mit 00, die nächste mit 02, die dritte mit 20, die vierte mit 22. Das ist ähnlich zu den Zahlen 0 bis 3 in Binärdarstellung: $0 = (00)_2$, $1 = (01)_2$, $2 = (10)_2$, $3 = (11)_2$. Der Grund ist, dass die Rechenregeln um von einer Zahl auf die nächste zu kommen, gleichlautend sind: Falls die letzte Stelle 0 ist, ersetze sie durch 2 bzw. 1. Andernfalls, also falls die letzte Stelle bereits 2 bzw. 1 ist, „addiere mit Übertrag“, also setze von hinten beginnend alle Stellen, die 2 bzw. 1 sind, auf 0 und setze die erste Stelle von rechts, die 0 war, auf 2 bzw. 1. (Das ist dasselbe, was im Zehnersystem passiert, wenn man eine Zahl, die bereits auf einige Neuner endet, um 1 erhöht: Die Neuner werden alle zu Nullen und die nächste Stelle wird um 1 erhöht, zB $731999 + 1 = 732000$.) So ist die nächste Zahl nach 2020222 gleich 2022000, und $87 + 1 = (1010111)_2 + 1 = (1011000)_2 = 88$.

   Auf diese Art können wir nun zum Beispiel auch berechnen, was die mittlere Zahl in der Liste aller solchen Zahlen von 2 bis 20002222 ist: Von den achtstelligen Zahlen sind die ersten $2^4 = 16$ in der Liste, also haben wir insgesamt $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 16 = 143$ Zahlen in der Liste. Die mittlere ist die 72-te Zahl. Wegen $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 < 72$ und $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 > 72$ suchen wir eine sechsstellige Zahl, und zwar wegen $72 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) = 9$ die neunte solche Zahl. Wir erinnern uns, dass wir in der Binärdarstellung mit 0 zu zählen beginnen mussten (weil 200000 die erste solche Zahl ist), also brauchen wir das Äquivalent zu $8 = (1000)_2$. Die gesuchte Zahl für diese ähnliche Aufgabenstellung mit größeren Zahlen wäre also 202000.

   Die Eleganz dieser Lösung ist, dass der Aufwand auch für viel größere Zahlen fast konstant bleibt: Wir berechnen die Anzahl der Zahlen in der Liste als einfache Summe von Zweierpotenzen, halbieren die erhaltene Anzahl, schauen in der Summe nach, wieviele Stellen die gesuchte Zahl haben muss, und finden sie dann über die Umwandlung in Binärdarstellung. Im Gegensatz dazu wird das Aufschreiben der gesamten Liste für große Zahlen sehr schnell sehr aufwändig. In der Informatik spielen sowohl Binärzahlen als auch diese „Skalierbarkeit“, also um wieviel der Rechenaufwand einer Methode bei großen Zahlen größer wird als bei kleinen, eine sehr große Rolle.

9. Wir wissen, dass ein Quadrat einer reellen Zahl nie negativ sein kann, und für alle Zahlen außer 0 sogar größer als 0 sein muss. Also ist $(x-2)^2$ nur dann 0, wenn $x = 2$ gilt, und sonst immer positiv. Ebenso ist $(x+2)^2$ nur dann 0, wenn $x = -2$ gilt, und sonst immer positiv. Damit die Summe 0 ist, müssten beide Terme gleichzeitig 0 sein, was aber nicht möglich ist, da x nicht gleichzeitig 2 und -2 sein kann. Also gibt es **keine reellen Lösungen**.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Wir können die Gleichung auch vereinfachen zu $(x-2)^2+(x+2)^2 = x^2-4x+4+x^2+4x+4 = 2x^2+8 = 0$, also nach Division durch 2 zu $x^2+4=0$ bzw. $x^2=-4$ und somit $x_{1,2} = \sqrt{-4} = \pm i$, womit wir lediglich zwei Lösungen im Raum der komplexen Zahlen erhalten.

10. Wenn eine solche Aufgabe bei einem Känguru-Wettbewerb gestellt wird, und keine Antwortoption „Es hängt von der Lage der Punkte ab“ vorkommt, können wir immer eine für uns bequeme Lage der Punkte wählen. So können wir zum Beispiel A und B zusammenfallen lassen, oder B genau als Mittelpunkt der Strecke AC annehmen. In beiden Fällen rechnen wir ganz leicht aus, dass die Mittelpunkte **15 cm** voneinander entfernt liegen.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Will man nun als mathematisch exakter Mensch zeigen, dass das auch bei allgemeinen Lagen der Fall ist, gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine davon besteht in einem Stetigkeitsargument. Wir betrachten wieder zunächsten den Fall, dass A und B zusammenfallen und rechnen die Distanz von 15 cm aus. Wenn wir nun B langsam in Richtung C schieben (womit D sich um dieselbe Entfernung nach rechts verschiebt), sehen wir, dass der Mittelpunkt von A und B gleich schnell wandert wie der Mittelpunkt von C und D und die Distanz daher konstant bleibt.

    Dass die Mittelpunkte gleich schnell wandern, ist leicht gezeigt, wenn wir die vier Punkte als Zahlen auf dem Zahlenstrahl betrachten. Dann ist der Mittelpunkt $M_{AB} = (A+B)/2$ und $M_{CD} = (C+D)/2$. Wandern B und D um x nach rechts, wodurch wir Punkte B' bzw. D' erhalten, gilt $M_{AB'} = (A+B+x)/2$ und $M_{CD'} = (C+D+x)/2$, also haben sich beide Punkte um $x/2$ verschoben. Neben direkter Berechnung lässt sich dieser Zusammenhang („der Mittelpunkt wandert halb so schnell wie der verschobene Endpunkt, wenn der andere Endpunkt fix ist“) auch auf viele andere Arten zeigen, zum Beispiel mittels Strahlensatz.

    Wenn einem das Stetigkeitsargument und das willkürliche Annehmen irgendwelcher bequemen Lagen ein wenig unheimlich ist – prinzipiell eine weise Entscheidung, weil man bei solchen Argumenten auch schnell einmal etwas übersehen kann –, kann man auch alles einfach direkt ausrechnen.

    Es gilt $M_{CD} - M_{AB} = (C+D)/2-(A+B)/2 = (C+D-A-B)/2 = (C-A+D-B)/2 = (12+18)/2 = 30/2 =$ **15**.

11. Wir rufen uns in Erinnerung, dass der Umfang linear mit dem Durchmesser wächst, d. h. doppelter Umfang bei doppeltem Durchmesser, dreifacher Umfang bei dreifachem Durchmesser, et cetera.

    Ein Kreisbogen mit gleicher Länge wie der Umfang des kleinen grauen Kreises müsste bei doppeltem Durchmesser also die Form eines Halbkreises haben, bei dreifachem Durchmesser ein Drittel eines Kreises sein, und bei vierfachem Durchmesser ein Viertelkreis sein. Diese Bedingung erfüllt nur **Kreisbogen D**.

12. Die Hochzahlen von c sind in beiden Termen gerade, somit sind c^2 und $c^{-4} = 1/c^4 = \left(\frac{1}{c^2}\right)^2$ als Quadrate reeller Zahlen ungleich 0 beide positiv. (Generell ist jeder Term mit einer geraden Hochzahl das Quadrat einer reellen Zahl und damit größer oder gleich 0.)

    Die Hochzahlen von b sind in beiden Termen ungerade, somit haben b^3 und b^5 jedenfalls dasselbe Vorzeichen – falls b positiv ist, sind beide positiv, falls b negativ ist, sind beide negativ. (Auch für c hätte man direkt argumentieren können, dass beide Hochzahlen die gleiche „Parität“ (gerade oder ungerade) haben, und somit c^2 und c^{-4} jedenfalls dasselbe Vorzeichen haben müssen. Die zusätzliche Information, dass sie positiv sind, ist für diese Aufgabe gar nicht nötig.)

    Die Hochzahlen von a haben verschiedene Parität. So ist a^4 jedenfalls positiv, aber a^3 hat dasselbe Vorzeichen wie a.

Zuletzt haben -2 und 3 verschiedene Vorzeichen. Damit $-2a^4b^3c^2$ und $3a^3b^5c^{-4}$ wie angegeben dasselbe Vorzeichen haben, muss also $\mathbf{a < 0}$ sein.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Mit etwas Übung kann man diese Information auch ganz schnell zusammenfassen: Wenn eine Zahl in den beiden Termen zwei Hochzahlen mit derselben Parität hat, trägt sie da und dort sicher dasselbe Vorzeichen zum Produkt bei, ist für den Vergleich der Vorzeichen der beiden Terme also irrelevant. Haben die Hochzahlen dagegen verschiedene Parität, dann hat der Ausdruck genau dann in den beiden Termen verschiedene Vorzeichen, wenn die Zahl negativ ist.

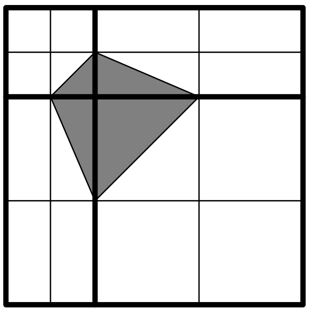
Somit sind die Vorzeichen von b und c jedenfalls irrelevant, während die passende Wahl des Vorzeichens von a genutzt werden kann, um die verschiedenen Vorzeichen von -2 und 3 auszugleichen.

13. Wir schreiben alle Zahlen der Reihe nach auf. Dabei werden mit „...“ Bereiche übersprungen, die jeweils wegen demselben Problem ausscheiden, weswegen auch vor und nach jedem solchen Bereich jeweils nur das durchgehend auftretende Problem gekennzeichnet ist:

    - 91,876
    - 91,877
    - 91,878
    - 91,879
    - 91,880
    - ...
    - 91,889
    - 91,890
    - ...
    - 91,899
    - 91,900
    - ...
    - 91,999
    - 92,000
    - ...
    - 92,009
    - 92,010
    - 92,011
    - 92,012
    - 92,013

    Wir erhalten also $92{,}013 - 91{,}876 = \mathbf{0{,}137}$.

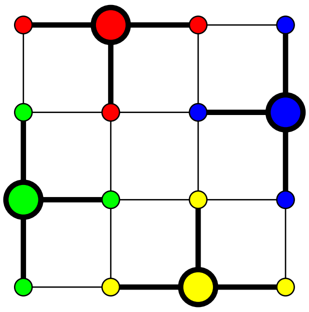
14. Hier gäbe es viele schöne Lösungsansätze, beispielsweise durch eine Streckung des Trapezes um seinen Diagonalenschnittpunkt um Faktor 2. Am elegantesten ist es jedoch, wenn man einige achsenparallele Linien dazueinzeichnet:



Nun sieht man ganz schnell, dass in jedem der vier Teile die graue Fläche genau ein Achtel ausmacht (da sie von einem von vier identischen Rechtecken genau die Hälfte ist). Auch insgesamt macht die graue Fläche daher ein Achtel aus, und der nichtgefärbte Teil entsprechend sieben Achtel, also das Siebenfache, also $7 \cdot 3 = \mathbf{21}$.

15. Durch Herausheben erhalten wir $2^{2021} + 2^{2022} = 2^{2021} \cdot (1+2) = 2^{2021} \cdot 3^1$ und $3^{2021} + 3^{2022} = 3^{2021} \cdot (1+3) = 3^{2021} \cdot 4 = 2^2 \cdot 3^{2021}$. Der größte gemeinsame Teiler enthält daher zwei Mal den Primfaktor 2 (limitiert dadurch, dass die zweite Zahl nicht mehr Zweier enthält) und ein Mal den Primfaktor 3 (limitiert durch die erste Zahl), ist also $2^2 \cdot 3 = \mathbf{12}$.

16. Eine mögliche Anordnung mit **4 Kraftwerken** ist wie folgt:

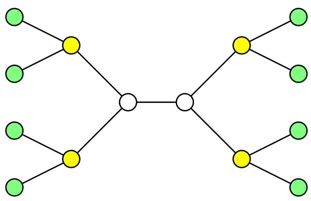


Da jedes Kraftwerk maximal 5 Städte versorgen kann, könnte man mit 3 Kraftwerken höchstens 15 der 16 Städte versorgen, also gibt es keine bessere Lösung.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Wie kommt man auf diese Lösung? Beispielsweise durch eine Fallunterscheidung danach, wie die Stadt links oben versorgt wird. Abzüglich Rotationen und Spiegelungen gibt es dafür eigentlich nur zwei Optionen: Entweder durch ein Kraftwerk in der Stadt selbst, oder durch ein Kraftwerk in der Stadt rechts daneben. Letztes führt beim Weiterbasteln ganz schnell auf diese Konfiguration, beispielsweise indem man sich als nächstes (nach Platzierung des roten Kraftwerks) überlegt, wer nun die Stadt ganz links in der zweiten Reihe versorgen soll. Von den vier Optionen (darüber, darunter, rechts daneben oder in der Stadt selbst) führt nur die vorgeschlagene Platzierung des grünen Kraftwerks zu keinen doppelt versorgten Städten.

17. Hier sehen wir einen Spielbaum mit 8 Startplätzen (grün), 4 Plätzen in der zweiten Runde (gelb) und 2 Plätzen im Finale (weiß):



Ob Anita und Martina vor dem Finale aufeinander treffen, hängt davon ab, ob sie auf derselben oder verschiedenen Seiten vom Spielbaum starten. Wir können „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ annehmen, dass Anita einen der vier linken Startplätze zugelost bekommt. (Andernfalls spiegeln wir einfach alles.)

Nun stehen für Martina noch 3 Plätze links und 4 Plätze rechts zur Auswahl, die Wahrscheinlichkeit, dass sie nach rechts gelost wird und somit im Finale spielt, beträgt also $\mathbf{\frac{4}{7}}$.

18. Jeder der beiden Schnitte, die parallel zur vorderen Seite sind, trägt zwei Schnittflächen bei, die jeweils gleich groß wie die vordere Seite sind. Ebenso trägt jeder der Schnitte parallel zur rechten Seite zwei Flächen bei, die gleich groß wie die rechte Seite sind, und jeder Schnitt parallel zur oberen Seite zwei Flächen, die gleich groß wie die obere Seite sind.

Insgesamt setzen die Oberflächen der 27 neuen Teile sich daher zusammen aus jeweils sechs Mal der vorderen, rechten und oberen Seite des ursprünglichen Quaders. Die Oberfläche X des ursprünglichen Quaders setzte sich aus jeweils zwei dieser Seiten zusammen, somit ist die neue Oberfläche drei Mal so groß, also **3X**.

19. Seien a, b, c, d, e die fünf Zahlen in aufsteigender Reihenfolge. Wir wenden nun zwei häufig nützliche Tricks an: Zum einen ist die Summe von n Zahlen gleich dem n-fachen ihres arithmetischen Mittels, also $a+b+c+d+e = 5 \cdot 24 = 120$, sowie $a+b+c = 3 \cdot 19 = 57$ und $c+d+e = 3 \cdot 28 = 84$.

    Zum anderen ist $c = (a+b+c)+(c+d+e)-(a+b+c+d+e)$, weil dabei jede Zahl außer c genau ein Mal addiert und ein Mal subtrahiert wird; nur c selbst wird zwei Mal addiert und ein Mal subtrahiert, bleibt daher also übrig.

    Also erhalten wir $c = (a+b+c)+(c+d+e)-(a+b+c+d+e) = 57+84-120 = \mathbf{21}$.

20. Wir erinnern uns an das pythagoreische Tripel $3^2+4^2=5^2$, womit wir im ersten Quadranten die Punkte $(3,4)$ und $(4,3)$ finden. Da die Quadranten alle zueinander symmetrisch sind, finden wir die entsprechenden zwei Punkte auch in den drei anderen Quadranten. Zusammen mit den vier Punkten $(0,\pm 5)$ und $(\pm 5,0)$ ergibt das **12** solche Punkte.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Der Vollständigkeit halber überprüfen wir noch, ob die beiden anderen in Frage kommenden Punkte im ersten Quadranten mit ganzzahliger x-Koordinate eventuell eine ganzzahlige y-Koordinate haben könnten, erhalten mittels der Kreisformel $x^2+y^2=5^2$ aber $y=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}$ bzw. $y=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$.

    Im Grunde könnte man das auch viel einfacher erkennen, wenn man den Kreis auf kariertes Papier aufmalt: Der Punkt $(3,4)$ hat bereits 4 als y-Koordinate, die links davon liegenden Punkte mit x-Koordinaten 1 und 2 müssten also eine ganzzahlige y-Koordinate haben, die größer als 4, aber kleiner als 5 ist.

21. Wir beobachten, dass irgendwo am 20-Eck die Zahl 1 und irgendwo die Zahl 20 stehen muss. Sowohl im als auch gegen den Uhrzeigersinn müssen wir also legal von 1 zu 20 kommen können. Wenn nun auf einer der beiden Seiten zwei aufeinanderfolgende Zahlen verwendet würden (beispielsweise 7 und 8), so stünden diese auf der anderen Seite beide nicht mehr zur Verfügung, und man müsste einen illegalen Sprung der Länge 3 (zum Beispiel von 6 auf 9) machen.

    Folglich muss auf beiden Seiten jeweils jede zweite Zahl verwendet werden. Nun müssen wir nur noch den Bereich rund um den Einser und den Zwanziger betrachten.

    Der Einser muss links und rechts von den beiden Zahlen 2 und 3 umgeben sein, da er nicht zu 4 oder einer noch größeren Zahl benachbart sein darf. Gemäß obiger Überlegung darf auf 3 nicht 4 folgen, also haben wir auf der einen Seite 1, 3, 5, . . . , 19, 20 und auf der anderen 1, 2, 4, 6, . . . , 18, 20.

    Es gibt also genau **zwei** Seiten, deren Endpunkte mit Zahlen beschriftet sind, die sich nur um 1 unterscheiden, nämlich zwischen 1 und 2 und zwischen 19 und 20.

22. Wenn man in **(A)** den rechten Baustein um 90° nach vorne dreht, kann man ihn auf den linken legen, und das gewünschte Objekt erhalten.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

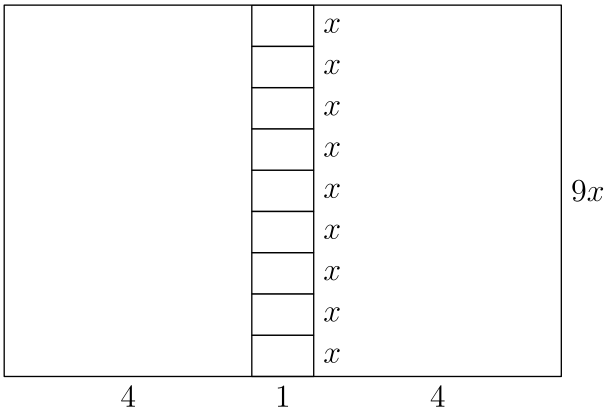
    Um für die anderen zu zeigen, dass das nicht geht, braucht man etwas räumliches Vorstellungsvermögen. Wir bezeichnen jeweils zwei aufeinanderliegende Würfel im gewünschten Objekt als linke, mittlere, rechte und vordere Säule.

    Die Würfel in der linken, rechten und vorderen Säule haben jeweils nur zwei Nachbarn. Der Bauteil, der in (D) gleich doppelt vorkommt, kann daher nur so gelegt werden, dass der Würfel mit drei Nachbarn in der mittleren Säule liegen kommt. Wenn man das tut, sind aber bereits beide Würfel in der mittleren Säule belegt, während in der linken, rechten und vorderen überall noch Würfel fehlen; diese lassen sich nicht mehr direkt verbinden. Damit kann ein solcher Bauteil wie in (D) überhaupt nicht verwendet werden, was (C), (D) und (E) ausschließt.

    In (B) sind die Bauteile bis auf Spiegelung zueinander identisch, das gewünschte Objekt ist spiegelsymmetrisch, und sogar jeder Bauteil zu sich selbst kann so rotiert werden, dass er wieder gleich aussieht. Somit gibt es nur zwei wesentlich verschiedene Arten, die linke Säule mit einem Bauteil komplett zu füllen (nämlich entweder mit den äußeren beiden Würfeln eines Bauteils oder mit den mittleren beiden). Im ersten Fall sieht man schnell, dass man stattdessen den zweiten Teil aus (A) zur Ergänzung benötigen würde, beim zweiten ragt überhaupt ein Würfel aus dem gewünschten Objekt hinaus.

    Der dritte Fall, dass ein Bauteil nur einen der beiden Würfel der linken Säule füllt, kann ebenso schnell ausgeschlossen werden. (Davon abgesehen sind die Bausteine nur zwei Würfel breit, somit kann kein Bauteil die linke und rechte Säule gleichzeitig füllen, also muss jede davon komplett mit Würfeln eines einzelnen Bauteils gefüllt werden.)

23. Sei x die Breite des kleinsten Rechtecks. Dann hat das große Rechteck, dessen Breite sich aus 9 solchen Rechtecken zusammensetzt, eine Breite von $9x$.



Die Breiten des kleinsten und des großen Rechtecks verhalten sich also wie $x : 9x = 1 : 9$, also muss wegen der Ähnlichkeit dasselbe auch für ihre Längen gelten. Somit beträgt die Länge des großen Rechtecks 9 (das Neunfache der Länge 1 des kleinsten Rechtecks).

Da diese Länge sich zusammensetzt aus der Länge 1 des kleinsten Rechtecks und zwei Mal der Breite des mittleren, hat das mittlere eine Breite von 4, und wie zuvor beobachtet eine Länge von $9x$.

Wegen der Ähnlichkeit zwischen kleinstem und mittlerem Rechteck gilt $1 : x = 9x : 4$, also $4 = 9x^2$, also $x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

Die Breite des großen Rechtecks beträgt also $9x = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6$, und sein Umfang somit $2 \cdot 9 + 2 \cdot 6 = \mathbf{30}$.

24. Wegen des Strahlensatzes verringert die Breite sich mit zunehmender Höhe linear: Jedes Mal, wenn man das Rechteck um 1 höher macht, wird es um 2 schmäler. Ein Rechteck mit Höhe 3 hätte also noch eine Breite von 1, und ein Rechteck mit Höhe $\mathbf{3.5 = \frac{7}{2}}$ hat eine Breite von 0, entspricht also genau der Spitze.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Etwas weniger intuitiv, dafür aber mathematisch präziser, kann man es natürlich auch ausrechnen. Sei h die Höhe des Dreiecks. Das obere kleine Dreieck mit Basis 3 und Höhe $h - 2$ ist ähnlich zum größeren Dreieck mit Basis 5 und Höhe $h - 1$, also gilt $(h - 2) : 3 = (h - 1) : 5$, also $5(h - 2) = 3(h - 1)$ und somit $5h - 10 = 3h - 3$, was schließlich zu $2h = 7$ und somit $h = \frac{7}{2}$ führt.

25. Wir suchen also Zahlen (abc), für die $100a + 10b + c = 5abc$ gilt. Zunächst sehen wir, dass $100a$, $10b$ und $5abc$ alle durch 5 teilbar sind, also muss auch c durch 5 teilbar sein. Die einzigen zwei Ziffern, die das erfüllen, sind 0 und 5; davon können wir 0 aber sofort ausschließen, weil das Produkt der Ziffern sonst Null wäre. Somit ist $c = 5$.

Damit ist die Zahl gleich $5 \cdot a \cdot b \cdot 5 = 25ab$, also ein Vielfaches von 25. Solche Vielfachen enden alle auf 25, 50, 75 oder 00. Davon können wir 50 und 00 sofort ausschließen, weil wir schon festgehalten haben, dass keine Ziffer 0 auftreten darf.

Würde die Zahl auf 25 enden, wäre sie gleich $5 \cdot a \cdot 2 \cdot 5 = 50a$, also ein Vielfaches von 50, und würde damit auf 0 enden, was wir bereits ausgeschlossen haben.

Also sind die letzten beiden Ziffern gleich 75. Somit bleibt $100a + 10 \cdot 7 + 5 = 5 \cdot a \cdot 7 \cdot 5$ zu lösen, vereinfacht $100a + 75 = 175a$ und nach Subtraktion von $100a$ auf beiden Seiten $75 = 75a$. Somit ist eindeutig $a = 1$ und daher 175 die **einzige** Zahl mit der gewünschten Eigenschaft.

26. Die vier linken Zahlen plus die vier rechten Zahlen ergeben in Summe $24 + 24 = 48$, während alle 10 Zahlen zusammen eine Summe von $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$ haben, also ist die Summe der Zahlen oben in der Mitte und unten in der Mitte gleich $55 - 48 = 7$. Es gibt dafür nur die Möglichkeiten $1 + 6$, $2 + 5$ oder $3 + 4$ (jeweils in zwei möglichen Anordnungen).

Nun betrachten wir die drei unteren Zahlen und stellen fest, dass 25 nur um 2 kleiner ist als die Summe der größten drei Zahlen $10 + 9 + 8 = 27$. Selbst, wenn links und rechts die zwei größten Zahlen 9 und 10 stehen, muss die Zahl in der Mitte daher mindestens $25 - 10 - 9 = 6$ sein.

Wenn wir diese beiden Informationen zusammenfassen, bleibt nur die Möglichkeit übrig, dass unten in der Mitte 6 und entsprechend beim Fragezeichen **1** steht, also **eine andere Zahl**.

27. Wir stellen fest, dass Punkte mit gleicher x-Koordinate wieder auf Punkte mit gleicher x-Koordinate abgebildet werden. Wenn man eine gesamte senkrechte Strecke abbildet, entsteht also wieder eine senkrechte Strecke. Analog werden waagrechte Strecken auf waagrechte Strecken abgebildet.

    Wir überlegen daher, wohin die vier Seiten des Quadrats abgebildet werden. Die Strecke von $(1,1)$ zu $(1,2)$ wird abgebildet auf eine Strecke, wo alle Punkte x-Koordinate $\frac{1}{1}=1$ haben. Die kleinste y-Koordinate 1 wird abgebildet auf $\frac{1}{1}=1$, die größte auf $\frac{1}{2}$. Wir erhalten also die Strecke von $(1,1)$ zu $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

    Die gegenüberliegende Seite von $(2,1)$ zu $(2,2)$ wird abgebildet auf eine Strecke, wo alle Punkte x-Koordinate $\frac{1}{2}$ haben. Die kleinste y-Koordinate 1 wird abgebildet auf $\frac{1}{1}=1$, die größte auf $\frac{1}{2}$. Wir erhalten also die Strecke von $\left(\frac{1}{2},1\right)$ zu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

    Analog werden die beiden waagrechten Seiten von $(1,1)$ zu $(2,1)$ und von $(1,2)$ zu $(2,2)$ abgebildet auf Strecken von $(1,1)$ zu $\left(\frac{1}{2},1\right)$ bzw. von $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ zu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

    Diese vier Strecken zusammen ergeben das kleinere Quadrat in **(C)**.

28. Wir suchen für jeden der beiden Ausdrücke unter der Wurzel den nächstgrößeren und nächstkleineren Ausdruck, der ein vollständiges Quadrat ist, und erhalten

$$N^2 < N^2 + N + 1 < N^2 + 2N + 1 = (N+1)^2$$

    und

$$(3N)^2 = 9N^2 < 9N^2 + N + 1 < 9N^2 + 6N + 1 = (3N+1)^2.$$

    Also ist $N+1$ die kleinste ganze Zahl größer als $\sqrt{N^2+N+1}$ und $3N$ die größte ganze Zahl kleiner als $\sqrt{9N^2+N+1}$. Zwischen $N+1$ und $3N$ (jeweils inklusive) liegen $3N-(N+1)+1 = \mathbf{2N}$ ganze Zahlen.

29. Um die Angabe besser zu verstehen, schreiben wir einmal die ersten solchen Rekursionsgleichungen auf:

$$\begin{aligned}
n = 1 \qquad & a_2 = a_2 \cdot a_1 + 1 \\
& a_3 = a_2 \cdot a_1 - 2 \\
n = 2 \qquad & a_4 = a_2 \cdot a_2 + 1 \\
& a_5 = a_2 \cdot a_2 - 2 \\
n = 3 \qquad & a_6 = a_2 \cdot a_3 + 1 \\
& a_7 = a_2 \cdot a_3 - 2
\end{aligned}$$

    Unser erster Gedanke ist, für die höheren Folgenelemente immer wieder einzusetzen, bis in der Gleichung nur noch a_1 und a_2 vorkommt. Das erfordert nur zwei Schritte:

$$2 = a_7 = a_2 \cdot a_3 - 2 = a_2 \cdot (a_2 \cdot a_1 - 2) - 2.$$

    Nun fällt uns noch auf, dass das Produkt $a_2 \cdot a_1$ auch in der Formel für a_2 vorkommt, und wir diese (umgeformt zu $a_2 \cdot a_1 = a_2 - 1$) nutzen können, um a_1 loszuwerden. Es gilt also

$$2 = a_2 \cdot (a_2 \cdot a_1 - 2) - 2 = a_2 \cdot (a_2 - 1 - 2) - 2,$$

    was wir zu

$$4 = a_2 \cdot (a_2 - 3)$$

    vereinfachen können. Nun haben wir eine quadratische Gleichung in a_2, von der wir die zwei Lösungen 4 und -1 entweder einfach erraten $(4 = 4 \cdot 1 = -1 \cdot -4)$ oder mittels der quadratischen Lösungsformel ausrechnen können.

    Dies ist eine notwendige Bedingung, das heißt, es kann keine anderen Lösungen geben. Es bleibt aber zu überprüfen, ob diese beiden überhaupt Lösungen sein können, also ob alle weiteren Bedingungen erfüllt sind.

    Zunächst rechnen wir a_1 aus, indem wir die Formel für a_2 nochmals umformen zu

$$a_1 = \frac{a_2 - 1}{a_2} = 1 - \frac{1}{a_2}.$$

Für $a_2 = 4$ folgt $a_1 = \frac{3}{4}$, und dann weiter $a_3 = 1, \quad a_4 = 17, \quad a_5 = 14, \quad a_6 = 5, \quad a_7 = 2.$

Für $a_2 = -1$ dagegen folgt $a_1 = 2$, was der Bedingung $0 < a_1 < 1$ verletzt.

Daher ist nur $\mathbf{a_2 = 4}$ eine Lösung.

30. Die wesentliche Erkenntnis für diese Aufgabe besteht darin, dass die vier Schnittpunkte eines Kreises mit zwei parallelen Linien jeweils ein gleichschenkeliges Trapez bilden.

    Wenn AB um 4 kürzer als GH ist, ist wegen der Symmetrie daher AC um 4 länger als GJ. Addieren wir nun 26 bzw. 24, also oben um 2 mehr als unten, ist AD um 6 länger als GK.

    Wegen der Symmetrie des zweiten Kreises ist dann AE um 6 kürzer als GL, und somit der oben verbliebene Teil EF um 6 länger als der unten verbliebene Teil x. Daher erhalten wir $x = 22 - 6 = \mathbf{16}$.