Känguru der Mathematik 2022
Gruppe Student (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 17. 3. 2022

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	B	A	C	C	B	B	C	A	B	D	D	B	D	E	A	A	C	C	E	D	B	B	C	C	E	D	A	D	C

– 3 Punkte Beispiele –

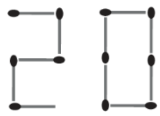
1. Wie viel ist $\frac{20\cdot 22}{(2+0)\cdot(2+2)}$?

(A) 34 (B) 40 (C) 44 **(D)** 55 (E) 85

Lösung: $\frac{20\cdot 22}{(2+0)\cdot(2+2)} = \frac{20\cdot 22}{8} = \frac{4\cdot 5\cdot 2\cdot 11}{8} = 5\cdot 11 = \mathbf{55.}$

2. Karo hat eine Streichholzschachtel mit 30 Streichhölzern. Aus einigen der Streichhölzer legt sie die Zahl 2022. Karo hat die ersten beiden Ziffern bereits geformt (siehe Abbildung). Wie viele Streichhölzer verbleiben in der Schachtel, wenn sie die Zahl fertiggestellt hat?

(A) 5 **(B)** 9 (C) 10 (D) 19 (E) 20



Lösung: Für die Ziffer 0 benötigt Karo sechs Streichhölzer, für die Ziffer 2 jeweils fünf Streichhölzer. Insgesamt bleiben also $30 - 3\cdot 5 - 6 = \mathbf{9}$ Streichhölzer in der Schachtel.

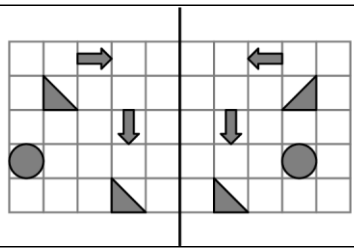
3. Ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 12 hat denselben Umfang wie ein Quadrat mit Seitenlänge *x*. Was ist der Wert von *x*?

(A) 9 (B) 12 (C) 16 (D) 24 (E) 36

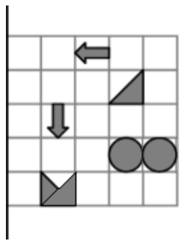
Lösung: Der Umfang des Dreiecks beträgt $3\cdot 12 = 36$. Der Wert der Seitenlänge des Quadrats mit demselben Umfang ist demnach $\frac{36}{4} = \mathbf{9}$.

4. Auf einem Blatt Papier sind einige Symbole gezeichnet (siehe Abbildung). Die Lehrkraft faltet die linke Seite entlang der senkrechten Linie nach rechts. Wie viele Symbole der linken Seite liegen nun deckungsgleich auf einem Symbol auf der rechten Seite?

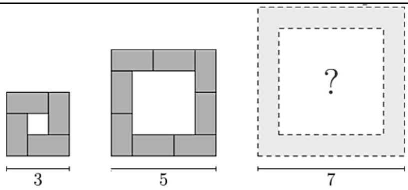
(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5



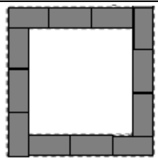
Lösung: Beim Umklappen kommen die beiden Pfeile sowie das obere der beiden Dreiecke (in der zweiten Zeile) deckungsgleich aufeinander zu liegen, insgesamt demnach **3** der Symbole.



5. Karin platziert Tische der Größe 2×1 entsprechend der Anzahl der Teilnehmer an einem Meeting. Die Abbildung zeigt die Tische für ein kleines, ein mittleres und ein großes Meeting von oben.
Wie viele Tische werden bei einem großen Meeting benötigt?



(A) 10 (B) 11 **(C)** 12 (D) 14 (E) 16



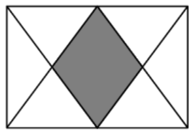
Lösung: Wie man der Skizze rechts entnehmen kann, werden **12** Tische für ein großes Meeting.
Alternativlösung: Da jede der Seitenlängen des Quadrats um 2 vergrößert wird, muss beim großen Meeting im Vergleich zum mittleren Meeting auf jeder Seite ein Tisch hinzugefügt werden, die Anzahl der Tische ist somit um 4 größer als beim mittleren Meeting (und mit derselben Überlegung um 8 größer als beim kleinen Meeting).

6. Ich bin kleiner als mein Halbes und größer als mein Doppeltes. Die Summe von mir und meinem Quadrat ist 0.
Welche Zahl bin ich?

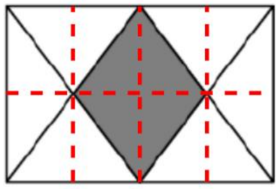
(A) -2 **(B)** -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

Lösung: Die Summe der gesuchten Zahl x und ihres Quadrats x^2 ist 0, also $x + x^2 = x \cdot (x+1) = 0$.
Entweder gilt $x = 0$ oder $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Da die Zahl größer als ihr Halbes ist, muss sie negativ sein, also ist $x = -\mathbf{1}$ die gesuchte Zahl.

7. Die Mittelpunkte der beiden längeren Seiten des Rechtecks sind mit den Eckpunkten verbunden (siehe Abbildung). Welcher Anteil des Rechtecks ist gefärbt?

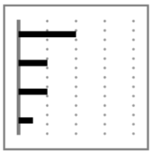
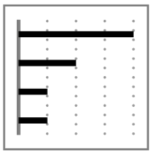
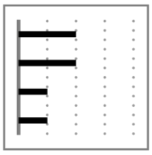
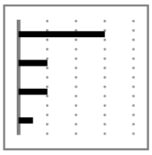
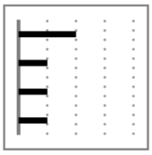


(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{2}{5}$



Lösung: Die senkrechten Symmetrieachsen und die horizontale Symmetrieachse zerlegen die Figur in sechzehn deckungsgleiche rechtwinkelige Dreiecke. Vier dieser Dreiecke sind gefärbt, damit ist $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ des gesamten Rechtecks gefärbt.

8. Sonjas Smartphone zeigt das Diagramm rechts an. In diesem ist dargestellt, wie lange sie vorige Woche mit vier verschiedenen Apps gearbeitet hat. In dieser Woche hat sie sich mit zwei ihrer Apps nur halb so lang beschäftigt, und mit den anderen beiden genau gleich lang wie letzte Woche.
Welches der folgenden könnte das Diagramm von dieser Woche sein?

(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E) 

Lösung: Verglichen mit voriger Woche sind
in Diagramm A alle 4 Balken halb so lang,
in Diagramm B nur ein Balken (der dritte) halb so lang und
in Diagramm D und E drei Balken halb so lang. In Diagramm D kommt zusätzlich noch ein Balken der Länge 3 vor.
Lediglich Diagramm **(C)** zeigt die gegebenen Nutzungszeiten: Der erste Balken und der dritte Balken sind halbiert, der zweite und vierte sind unverändert.

9. In der abgebildeten Multiplikationstabelle soll in jedem weißen Feld das Produkt der Zahlen in den grauen Feldern in derselben Zeile beziehungsweise Spalte stehen. Eine Zahl ist bereits eingetragen. Die ganze Zahl x ist größer als die positive ganze Zahl y.
Was ist der Wert von y?

·	x	x+1
y		
y+1		77

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 11

Lösung: Weil y und damit auch x positive ganze Zahlen sein müssen, ist 77 das Produkt zweier ganzzahliger Faktoren, die größer als 1 sein müssen, also kann 77 nur das Produkt von 7 und 11 sein. Wegen x > y gilt x+1=11, y+1=7, also y = **6**.

10. Auf einem Stimmzettel stehen 5 Personen zur Wahl.
Nachdem 90 % der Stimmen ausgezählt sind, gibt es folgenden Zwischenstand (siehe Tabelle).
Wie viele der 5 Personen können die Wahl nicht mehr gewinnen?

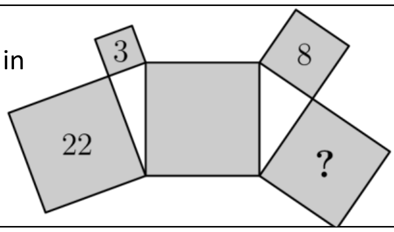
Alex	Bella	Clint	Diana	Eddy
14	11	10	8	2

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Als 90% der Stimmen ausgezählt sind, sind das 45 Stimmen, also sind noch 5 Stimmen nicht erfasst. Im Gegensatz zu Alex, Bella und Clint, die gegebenenfalls auf Platz 1 landen können, haben **2** Personen, nämlich Diana und Eddy, zu diesem Zeitpunkt mehr als 5 Stimmen Rückstand auf Alex, können also die Wahl nicht mehr gewinnen.

4 Punkte Beispiele

11. Fünf Quadrate und zwei rechtwinkelige Dreiecke sind wie in der Abbildung platziert. Die Zahlen 3, 8 und 22 in den Quadraten geben die Größe der Fläche in m² an. Wie groß ist die Fläche jenes Quadrats (in m²), in dem ein Fragezeichen steht?



(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

Lösung: Das zentrale Quadrat (Seitenlänge s) ist für jedes der beiden rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat über der Hypotenuse. Nach Satz von Pythagoras, angewandt auf das linke Dreieck, ergibt sich $s^2 = 22 + 3 = 25$. Bezeichnen wir den gesuchten Flächeninhalt (des Quadrats mit dem Fragezeichen) mit x^2, so ergibt sich nach Satz von Pythagoras für das rechte Dreieck $x^2 = s^2 - 8 = 25 - 8 = \mathbf{17}$.

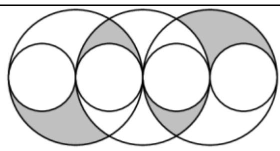
12. 2022 Fliesen liegen in einer langen Reihe. Adam entfernt jede sechste Fliese. Beate entfernt anschließend von den verbleibenden Fliesen jede fünfte.
Cora entfernt danach von den verbleibenden Fliesen jede vierte.
Wie viele Fließen bleiben liegen?

(A) 0 (B) 337 (C) 674 (D) 1011 (E) 1348

Lösung: Wegen $2022 : 6 = 337$ entfernt Adam 337 Fliesen und lässt für Beate $2022 - 337 = 1685$ Fliesen über. Wegen $1685 : 5 = 337$ entfernt auch Beate 337 Fliesen und lässt $1685 - 337 = 1348$ für Cora über. Die entfernt $1348 : 4 = 337$ Fliesen, und es bleiben **1011** Fliesen liegen.

Alternativlösung: Nach Adam verbleiben $\frac{5}{6}$ der Fliesen, nach Beate $\frac{4}{5}$ der restlichen Fliesen und nach Cora $\frac{3}{4}$ der verbleibenden Fiesen. Insgesamt verbleiben $2022 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = 2022 \cdot \frac{3}{6} = 2022 \cdot \frac{1}{2} = 1011$ Fliesen.

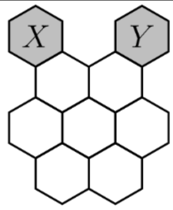
13. Die Abbildung zeigt drei große Kreise derselben Größe und vier kleine Kreise.
Jeder kleine Kreis berührt zwei große Kreise und hat den Radius 1.
Wie groß ist der Inhalt der markierten Fläche?



(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π (E) 6π

Lösung: Spiegelt man die markierten Flächenteile, die rechts von der senkrechten Symmetrieachse der (ungefärbten) Figur liegen, an dieser Symmetrieachse nach links, so sieht man, dass die gesamte markierte Fläche mit der Fläche eines großen Kreises ohne zwei kleine übereinstimmt. Der Radius eines großen Kreises ist 2, der Flächeninhalt eines großen Kreises also 4π. Weil der Radius jedes der kleinen Kreise 1 ist, der Flächeninhalt also 2π ist, ist die Größe der markierten Fläche gleich $4\pi - 2\pi = \mathbf{2\pi}$.

14. Biene Maja möchte von Bienenwabe X zur Wabe Y wandern. Sie kann sich nur von einer Wabe zu einer Nachbarwabe bewegen, wenn diese eine gemeinsame Seite haben.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Maja, um von X nach Y zu gelangen, wenn sie jede der sieben weißen Waben genau einmal betreten muss?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 **(D)** 5 (E) 6

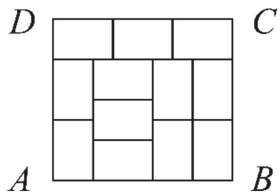
Lösung: Maja muss auf ihrem Weg von X nach Y jede der sieben weißen Waben genau einmal betreten. Die mittlere Wabe kann Maja weder als erste noch als letzte Wabe betreten, weil sie zuerst die an X grenzende und zuletzt die an Y grenzende Wabe betreten muss und diese Waben darüber hinaus nie betreten darf. Daher kann sie die mittlerer Wabe als zweite, dritte, … , sechste betreten. Weil sich der restliche Weg dadurch zwangsläufig ergibt, ergeben sich somit **5** Möglichkeiten.

15. Die Summe zweier positiver ganzer Zahlen ist dreimal so groß wie deren Differenz.
Das Produkt der beiden Zahlen ist vier Mal so groß wie deren Summe.
Wie groß ist die Summe der beiden Zahlen?

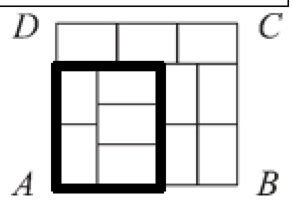
(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 15 **(E)** 18

Lösung: Bezeichnen wir die größere Zahl mit a, die kleiner mit b, so ergeben sich die Gleichungen $a + b = 3(a - b)$ und $a \cdot b = 4(a + b)$. Aus der ersten ergibt sich $a = 2b$; Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $2b^2 = 12b$ und (wegen b>0) $b = 6, a = 12$, also $a + b = \mathbf{18}$.

16. Das Rechteck $ABCD$ besteht aus 12 kongruenten Rechtecken (siehe Abbildung).
Wie lautet das Verhältnis $\frac{AD}{DC}$?



(A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{9}{8}$



Lösung: Bezeichnen wir die Länge der längeren Seite der kleinen Rechtecke mit l, die der kürzeren mit b, so ergibt sich aus der Figur (schwarz markiert) $2l = 3b$, also $l : b = 3 : 2$ oder $l = 3t, b = 2t$.
Daraus folgt AD = 8t, DC = 9t und somit AD : DC = 8 : 9.

17. Ein Hase und ein Igel treten in einem Wettrennen gegeneinander an. Die kreisförmige Strecke ist 550 m lang. Die Startlinie und die Ziellinie stimmen überein. Die Geschwindigkeit des Hasen beträgt konstant 10 m/s, die des Igels konstant 1 m/s. Sie starten gleichzeitig, doch der Igel versucht zu schummeln und startet in die andere Richtung. Als die beiden einander treffen, dreht sich der Igel augenblicklich um und folgt dem Hasen.
Wie viele Sekunden nach dem Hasen erreicht der Igel das Ziel?

(A) 45 (B) 50 (C) 55 (D) 100 (E) 505

Lösung: Aufgrund ihrer Geschwindigkeiten von 10m/s bzw. 1m/s bewegen sich Hase und Igel zuerst mit 11m/s auf einander zu und treffen einander wegen $550 : 11 = 50$ nach 50 Sekunden. Der Igel hat bei ihrem Aufeinandertreffen 50m zurückgelegt, der Hase 500m. Bis ins Ziel müssen beide dann noch 50m zurücklegen. Dafür benötigt der Hase 5s, der Igel 50s.
Der Igel erreicht das Ziel also **45** Sekunden nach dem Hasen.

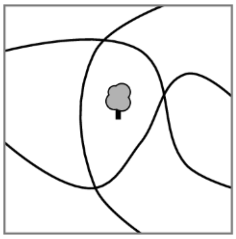
18. Die Enkel fragen ihre Großmutter, wie alt sie ist. Die Großmutter fordert diese auf, das Alter zu raten.
Das erste Kind sagt 75, das zweite sagt 78 und das dritte sagt 81. Es stellt sich heraus, dass eines der Kinder sich um 1 Jahr irrte, eines sich um 2 Jahre und eines sich sogar um 4 Jahre.
Wie viele Möglichkeiten für das Alter der Großmutter gibt es?

(A) 0 (B) 1 **(C)** 2 (D) 3 (E) 4

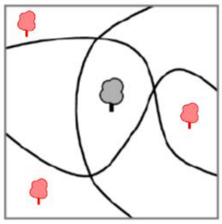
Lösung: Die größte Abweichung in den Schätzungen beträgt 4 Jahre, daher kann die Großmutter wegen $75 + 4 = 79$ nicht älter als 79 Jahre, wegen $81 - 4 = 77$ nicht jünger als 77 Jahre sein. Weil keine Schätzung genau passt, kann die Großmutter nicht 78 Jahre alt sein, was zwei Möglichkeiten für ihr Alter überlässt: 77 Jahre oder 79 Jahre. Für beide Möglichkeiten weichen die drei Schätzungen für das Alter der Großmutter um 1, 2 und 4 Jahre vom tatsächlichen Alter ab, also gibt es tatsächlich diese **zwei Möglichkeiten** für das Alter der Großmutter.

19. Durch unseren Stadtpark verlaufen drei Wege, wie auf der Karte abgebildet.
Ein Baum steht in der Mitte des Parks.
Wie viele Bäume müssen mindestens zusätzlich gepflanzt werden, damit sich auf beiden Seiten eines jeden Weges gleich viele Bäume befinden?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

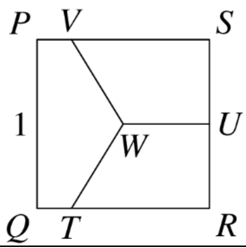


Lösung: Weil beiderseits jedes Wegs gleich viele Bäume stehen sollen, muss die Gesamtzahl aller Bäume gerade sein, die Zahl der neu zu pflanzenden Bäume also ungerade.
Dass das gewünschte Ziel durch Pflanzen nur eines Baumes nicht erreichbar ist, ist leicht überprüfbar. Die Abbildung zeigt, dass das Pflanzen von 3 zusätzlichen Bäumen reicht.
(Hinweis: auch mit 5 Bäumen ist es möglich, es ist allerdings nach der kleinsten Anzahl an zusätzlichen Bäumen gefragt)



20. Die Abbildung zeigt ein Quadrat $PQRS$ mit Seitenlänge 1. Der Punkt U ist der Mittelpunkt der Seite RS und der Punkt W ist der Mittelpunkt des Quadrats.
Die Strecken TW, UW und VW unterteilen das Quadrat in drei gleich große Teilflächen.
Wie lang ist die Strecke SV?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$ **(E)** $\frac{5}{6}$

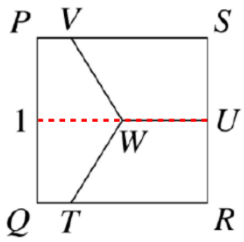


Lösung: Die Strecke UW liegt auf einer Symmetrieachse des Quadrats. Weil die Trapeze $TRUW$ und $VSUW$ flächengleich sind, liegen auch V und T symmetrisch bezüglich dieser Symmetrieachse, also ist auch das Fünfeck $PQTWV$ symmetrisch und wird durch die Symmetrieachse UW in zwei kongrunente Trapeze zerlegt, deren Flächeninhalte halb so groß sind wie die der Trapeze $TRUW$ und $VSUW$. Unter Berücksichtigung der gleichen Höhe ½ aller vier Trapeze ergibt sich mit $WU = ½$:

$$(½ + SV):(½ + PV) = (½ + SV):(½ + 1 - SV) =$$
$$= (0{,}5 + SV) : (1{,}5 - SV) = 2 : 1$$

und weiters

$$3 - 2SV = 0{,}5 + SV$$
$$\Leftrightarrow 2{,}5 = 3SV \Leftrightarrow SV = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}.$$



Alternativlösung: Da die drei Flächen gleich groß sind, hat das Trapez $SVWU$ exakt ein Drittel der Quadratfläche, also 1/3. Der Flächeninhalt dieses Trapezes kann aber berechnet werden als:

$$\frac{SU \cdot (\mathrm{SV} + \mathrm{UW})}{2} = \frac{\frac{1}{2}(SV + ½)}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow SV + \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow SV = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8-3}{6} = \frac{5}{6}.$$

5 Punkte Beispiele

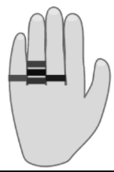
21. Einst traf ich sechs Schwestern, deren Alter sechs aufeinanderfolgende ganze Zahlen waren. Ich fragte jede von ihnen: Wie alt ist die älteste deiner Schwestern? Welche der folgenden Zahlen kann **nicht** die Summe der sechs Antworten gewesen sein?

(A) 95 (B) 125 (C) 167 **(D)** 205 (E) 233

Lösung: Die fünf jüngeren Mädchen werden auf die gestellte Frage mit dem Alter der ältesten Schwester antworten. Das älteste Mädchen nennt das Alter ihrer Schwester, die um 1 Jahr jünger ist als sie. Wenn das älteste Mädchen x Jahre alt ist, ist die Summe der sechs Antworten somit $5 \cdot x + x - 1 = 6x - 1$. Die Summe ist also um 1 kleiner als ein Vielfaches von 6. Antwort **(D) 205** kann nicht die gesuchte Summe sein, da 205+1=206 nicht durch 6 teilbar ist. (Die Antworten (95+1=96), (125+1=126), (167+1=168) und (233+1=234) sind möglich.)

22. Veronika trägt fünf Ringe, wie abgebildet. Auf wie viele unterschiedliche Arten kann sie diese Ringe, einen nach dem anderen, abnehmen?

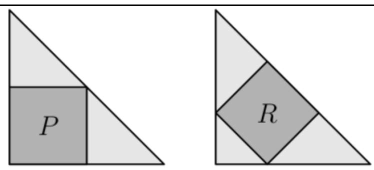
(A) 16 **(B)** 20 (C) 24 (D) 30 (E) 45

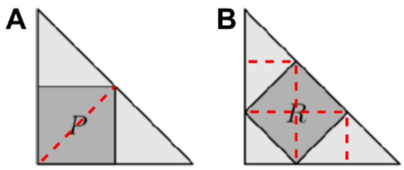


Lösung: Während Veronika die drei Ringe ihres Ringfingers abnimmt, kann sie 4 verschiedene Zeitpunkte wählen, um den Ring am Mittelfinger abzunehmen (zu Beginn, nach dem ersten Ring, nach dem zweiten Ring oder ganz am Schluss). Für jede dieser 4 Arten hat sie wiederum 5 verschiedene Möglichkeiten, den Ring am kleinen Finger abzunehmen (zu Beginn, nach dem ersten Ring, nach dem zweiten Ring, nach dem dritten Ring oder am Schluss). Es gibt also insgesamt $4 \cdot 5 = \mathbf{20}$ Möglichkeiten.

23. In zwei kongruente gleichschenkelig rechtwinkelige Dreiecke ist jeweils ein Quadrat eingeschrieben. Der Flächeninhalt des Quadrats P ist 45 Einheiten. Wie viele Einheiten hat der Flächeninhalt des Quadrats R?

(A) 35 **(B)** 40 (C) 45 (D) 50 (E) 60





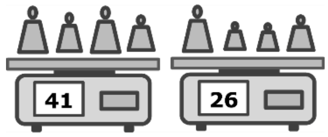
Lösung: Unterteilt man das Quadrat P entlang einer Diagonale, setzt sich das große Dreieck **A** aus vier gleichen, kleineren Dreiecken zusammen. Die Fläche eines großen Dreiecks beträgt also $4 \cdot \frac{45}{2} = 90$ Flächeneinheiten. Teilt man nun das Quadrat R entlang seiner Diagonalen, sowie zwei der anliegenden Dreiecke entlang ihrer Höhen, besteht Dreieck **B** aus 9 gleichen, kleinen Dreiecken. Die Fläche eines kleinen Dreiecks beträgt also $\frac{90}{9} = 10$ Flächeneinheiten. Das Quadrat R setzt sich aus 4 solcher Dreiecke zusammen und ist $4 \cdot 10 = \mathbf{40}$ Flächeneinheiten groß.

24. In einer Stadt verständigen sich alle Einwohner ausschließlich durch Fragen. Es gibt zwei Typen von Einwohnern: die „positiven", die ausschließlich Fragen stellen, deren Antwort ja ist und die „negativen", die nur Fragen stellen, deren Antwort nein ist. Wir treffen die Einwohner Albert und Berta und Berta fragt uns: „Sind Albert und ich beide negativ?"
Welchem Typ gehören sie an?

(A) Beide sind positiv
(B) Beide sind negativ
(C) Albert ist positiv und Berta ist negativ
(D) Albert ist negativ und Berta ist positiv
(E) Die Informationen reichen nicht aus um das zu entscheiden

Lösung: Berta kann nicht positiv sein, da sonst ihre Frage „ob *beide negativ* sind", mit „ja" zu beantworten wäre, was widersprüchlich ist. Berta muss also negativ sein. Wenn Berta negativ ist, ist die Antwort auf ihre Frage „nein". Das heißt, Berta und Albert sind *nicht* beide negativ. Da Berta bereits negativ ist, ist Albert positiv, die Antwort ist also **(C)**.

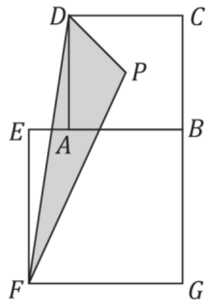
25. Zwölf Gewichte haben ganzzahlige Massen von 1 g, 2 g, 3 g, ..., 11 g bzw. 12 g.
Ein Händler verteilt diese Gewichte auf 3 Gruppen zu je 4 Gewichten.
Die Masse der ersten Gruppe beträgt 41 g, die Masse der zweiten Gruppe 26 g (siehe Abbildung).
Welches der folgenden Gewichte ist in derselben Gruppe wie das Gewicht mit 9 g?



(A) 3 g (B) 5 g **(C)** 7 g (D) 8 g (E) 10 g

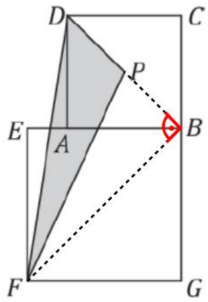
Lösung: Die Gesamtmasse aller Gewichte ist $1+2+\cdots+12=78$ g. Die Masse der dritten Gruppe beträgt also $78-41-26=11$ g. Die einzige Möglichkeit, die dritte Gruppe aus vier unterschiedlichen Gewichten zu bilden, ist die Gruppe {1,2,3,5} bzw. $1+2+3+5=11$ g. Um die erste Gruppe mit dem Gesamtgewicht 41 g zu bilden, benötigt man jedenfalls die drei schwersten Einzelgewichte sowie das 8 g-Gewicht, $8+10+11+12=41$ g. Die dritte Gruppe setzt sich also aus {4,6,7,9} zusammen und das 9 g-Gewicht ist mit dem **7 g**-Gewicht in einer Gruppe.

26. Die Diagonalen der Quadrate $ABCD$ und $EFGB$ sind 7 cm bzw. 10 cm lang (siehe Abbildung). Der Punkt P ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats $ABCD$). Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks FPD (in cm²)?



(A) 14,5 (B) 15 (C) 15,75 (D) 16,5 **(E)** 17,5

Lösung: Im Quadrat $EFGB$ ist der Winkel zwischen der Diagonalen $\overline{FB}$ und der Seite $\overline{BE}$ gleich 45°. Gleiches gilt im Quadrat $ABCD$ für den Winkel zwischen der Seite $\overline{AB}$ und der Diagonale $\overline{BD}$. Da der Punkt A auf der Seite $\overline{BE}$ liegt, ist der Winkel $\angle FBD$ gleich 45°+45°=90°. Das Dreieck FBD ist somit rechtwinklig mit einem Flächeninhalt von $\frac{(\overline{FB}\cdot\overline{BD})}{2}=\frac{(10\cdot 7)}{2}=35cm^2$.



Der Punkt P teilt die Dreiecksseite $\overline{BD}$ in zwei gleich lange Strecken $\overline{BP}=\overline{PD}$ und das Dreieck FBD wird durch die Verbindung $\overline{FP}$ in die zwei Dreiecke FBP und FPD unterteilt. Im Dreieck FBP ist die Strecke $\overline{FB}$ die Höhe auf die Seite $\overline{BP}$ und sein Flächeninhalt ist $\frac{(\overline{FB}\cdot\overline{BP})}{2}$. Im Dreieck FPD ist die Höhe auf die Seite $\overline{PD}$ ebenfalls die Strecke $\overline{FB}$ und sein Flächeninhalt ist $\frac{(\overline{FB}\cdot\overline{PD})}{2}$. Da $\overline{BP}=\overline{PD}$, haben die Dreiecke FBP und FPD denselben Flächeninhalt. Die Verbindung $\overline{FP}$ teilt das Dreieck FBD also in zwei Dreiecke gleicher Fläche und der Flächeninhalt von FPD ist $\frac{35}{2}=\mathbf{17,5}cm^2$. ($\overline{FP}$ wird hierbei Schwerlinie eines Dreiecks genannt).

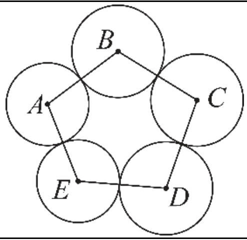
Alternativlösung: Im Quadrat $EFGB$ ist der Winkel zwischen der Diagonalen $\overline{FB}$ und der Seite BE gleich 45°. Gleiches gilt im Quadrat $ABCD$ für den Winkel zwischen der Seite $\overline{AB}$ und der Diagonale $\overline{BD}$. Da der Punkt A auf der Seite $\overline{BE}$ liegt, ist der Winkel $\angle FBD$ gleich $45°+45°=90°$. Für das Dreieck FPD ist daher $\overline{BF}$ die Höhe zur Seite $\overline{DP}$.
Der Flächeninhalt von FPD ist daher: (*Höhe · entsprechender Seite)/2* = $\frac{\frac{7}{2}\cdot 10}{2}=\frac{70}{4}=17{,}5$ cm².

27. Das Produkt der Ziffern einer Zahl N ist 20.
Welche der folgenden Zahlen kann **nicht** das Produkt der Ziffern von $N+1$ sein?

(A) 24 (B) 25 (C) 30 **(D)** 35 (E) 40

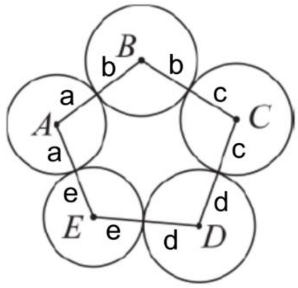
Lösung: Die Zahl 20 kann nur als Produkt der Ziffern $4\cdot5\cdot1$ *bzw.* $2\cdot2\cdot5\cdot1$ geschrieben werden. N kann also nur aus den Ziffern 1,2,4,5 bestehen. Für die Ziffern von $N+1$ ergeben sich somit zusätzlich die möglichen Ziffern (1+1)=2, (2+1)=3, (4+1)=5 und (5+1)=6. $N+1$ kann aus den Ziffern 1,2,3,4,5,6 bestehen. Die Antwortmöglichkeit 35 kann jedoch nur als Produkt der Ziffern $5\cdot7$ geschrieben werden. Da 7 keine mögliche Ziffer von N+1 ist, kann **35** nicht das Produkt der Ziffern von $N+1$ sein.
(Beispiel-Möglichkeiten für die restlichen vier Antworten: (N=45, N+1=46 und $4\cdot6=24$); (N=54, N+1=55 und $5\cdot5=25$); (N=252; N+1=253 und $2\cdot5\cdot3=30$); (N=2251, N+1=2252 und $2\cdot2\cdot5\cdot2=40$))

28. Gegeben sind fünf Kreise mit den Mittelpunkten *A*, *B*, *C*, *D* bzw. *E*, welche sich, wie in der Abbildung dargestellt, berühren. Die eingezeichneten Strecken verbinden die Mittelpunkte benachbarter Kreise. Die Abstände der Mittelpunkte sind $AB = 16$, $BC = 14$, $CD = 17$, $DE = 13$ und $AE = 14$.
Welcher der Punkte ist der Mittelpunkt des Kreises mit dem größten Radius?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Lösung: Der Radius des Kreises A sei a, von B sei b, von C sei c, von D sei d und von E sei e (siehe Abbildung). Dann gilt, dass $a + b = 16$, $b + c = 14$, $c + d = 17$, $d + e = 13$ und $e + a = 14$ ist. Der Umfang des gezeichneten Fünfecks beträgt somit
$a + b + b + c + c + d + d + e + e + a = 16 + 14 + 17 + 13 + 14 =$
$= 74 = 2 \cdot (a + b + c + d + e)$.
Der halbe Umfang entspricht also der Summe $a + b + c + d + e = \frac{74}{2} = 37$.
Da $b + c$ und $d + e$ die kürzesten Strecken sind,
muss $a = 37 - (b + c) - (d + e) = 10$ der längste Radius sein, die Antwort ist also **(A)**.

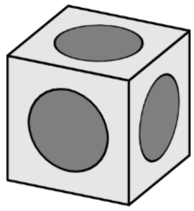


29. Acht Teams nehmen an einem Fußballturnier teil, bei dem jedes Team gegen jedes andere Team genau einmal spielt. In jedem Spiel bekommt der Sieger 3 Punkte und der Verlierer keinen Punkt. Bei einem Unentschieden bekommen beide Teams jeweils 1 Punkt. Am Ende haben alle Teams zusammen 61 Punkte erreicht.
Was ist die maximale Zahl an Punkten, die das Team mit den meisten Punkten erreicht haben kann?

(A) 21 (B) 19 (C) 18 **(D)** 17 (E) 16

Lösung: Die acht Teams bestreiten gemeinsam 28 Spiele, jedes Team spielt 7 Spiele. Pro Spiel werden bei einem Unentschieden insgesamt 2 Punkte auf die beiden Teams verteilt (jede Mannschaft bekommt 1 Punkt). Bei einem Sieg werden gesamt 3 Punkte auf die beiden Teams verteilt (3 Punkte für den Sieger, der Verlierer bekommt keine Punkte). Wenn alle 28 Spiele Unentschieden enden, kann die minimale Gesamtpunkteanzahl von $28 \cdot 2 = 56$ Punkten erreicht werden. Da 61 Gesamtpunkte erreicht wurden, gab es in 61-56=5 Spielen einen Gewinner. Wenn in diesen 5 Spielen jeweils das gleiche Team gewonnen hat, kann dieses Team maximal $5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = \mathbf{17}$ Punkte erreicht haben.

30. In jede Seitenfläche eines Holzwürfels mit Seitenlänge 2 werden halbkugelförmige Löcher geschnitzt. Alle diese Löcher sind gleich groß, und ihre Mittelpunkte liegen in den Mittelpunkten der Würfelflächen. Die Löcher sind so groß wie möglich, sodass jede Halbkugel jede benachbarte Halbkugel in je genau einem Punkt berührt.
Wie groß ist der Durchmesser der Löcher?



(A) 1 (B) 2 **(C)** $\sqrt{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Lösung: Man schneide den Würfel mit einer Ebene, die parallel zu einer Seitenfläche ist und durch den Mittelpunkt des Würfels geht. In diesem Schnitt werden vier der Halbkugeln dann zu Halbkreisen mit dem Radius r, die sich jeweils in einem Punkt tangential berühren. Für je zwei berührende Halbkreise folgt, dass die Strecke zwischen ihren beiden Mittelpunkten (M bzw. M‘) gleich 2r ist. Der Durchmesser eines Loches, $2r$, ist somit die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $MM‘A$ mit den Katheten $\overline{MA} = \overline{M'A} = 1$ (=halbe Seitenlänge des Würfels).
Nach dem Satz des Pythagoras: $2r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{\mathbf{2}}$