Känguru 2021 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Wir können aus den in der App angezeigten Temperaturen ablesen, an welchen Tagen der Punkt in der Grafik höher oder tiefer als an welchen anderen Tagen sein muss.

   Von Freitag auf Samstag sinkt die Temperatur, somit muss der zweite Wert niedriger als der erste sein, das schließt (A) schon einmal aus.

   Sonntag und Montag sind gleich warm, müssen also auf gleicher Höhe sein, was (B) ausschließt.

   Der Mittwoch liegt von der Temperatur her zwischen Freitag und Samstag, während in (C) der erste Tag kälter ist als der sechste.

   Der kälteste Tag ist der Donnerstag, somit muss der letzte Wert am niedrigsten sein. Dies spricht gegen (D).

   Bei **(E)** können wir überprüfen, dass alle Vergleiche zwischen Tagen korrekt sind.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Wir können auch zuerst die Tage nach absteigender Temperatur ordnen und erhalten die Reihenfolge Dienstag, Sonntag = Montag, Freitag, Mittwoch, Samstag, Donnerstag. Dann gehen wir in den fünf möglichen Grafiken jeweils von oben nach unten (also suchen den höchsten Punkt, dann den zweithöchsten, und so weiter) und schauen, ob wir dieselbe Reihenfolge erhalten.

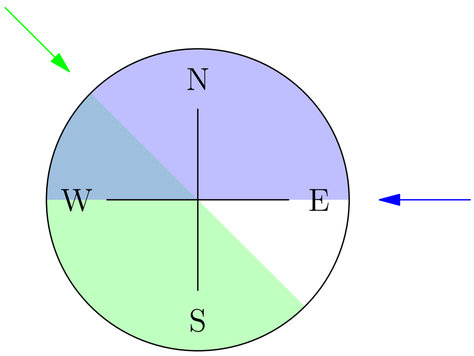
2. Der Wert von $\sqrt{21}$ liegt wegen $4^2 = 16 < 21 < 25 = 5^2$ zwischen den ganzen Zahlen 4 und 5 (konkret $\sqrt{21} \approx 4{,}583$), also liegt $20 - \sqrt{21}$ zwischen 15 und 16, während $20 + \sqrt{21}$ zwischen 24 und 25 liegt. Die ganzen Zahlen im Intervall $(20 - \sqrt{21}, 20 + \sqrt{21})$ sind daher 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, also **9** Stück.

3. Ein solcher Quader hat eine Grundfläche der Form $1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$, eine ebensolche obere Fläche, und vier Seitenflächen mit jeweils $1\,\text{cm} \times 0.5\,\text{cm}$. Insgesamt beträgt die Oberfläche daher $2 \cdot 1\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} + 4 \cdot 1\,\text{cm} \cdot 0.5\,\text{cm} = 2 \cdot 1\,\text{cm}^2 + 4 \cdot 0.5\,\text{cm}^2 = 4\,\text{cm}^2$.

4. Da die Quadrate und die darin enthaltenen Kreise alle nur unterschiedlich vergrößerte oder verkleinerte Varianten derselben Figur sind, und das Flächenverhältnis sich beim zentrischen Strecken nicht ändert, genügt es, für ein einziges Quadrat und einen darin eingeschriebenen Kreis das Verhältnis zu berechnen.

   Wir wählen nun Zahlen, mit denen es sich leicht rechnen lässt, daher betrachten wir einen Kreis mit Radius $r = 1$, der einem Quadrat mit Seitenlänge $s = 2$ eingeschrieben ist. Die Fläche des Kreises beträgt $r^2\pi = 1^2\pi = \pi$ und die Fläche des Quadrates beträgt $s^2 = 2^2 = 4$. Deren Verhältnis ist daher $\frac{\pi}{4}$.

5. Betrachtet man den Fahnenmast von Nordwest (grüner Pfeil), so muss er im hier grün dargestellten Bereich sein, andernfalls würde er nach links geneigt erscheinen. Bei der Betrachtung von Osten (blauer Pfeil) muss er im blau gefärbten Bereich liegen, um nach rechts geneigt zu erscheinen. Er kann also nur im sowohl blau als auch grün gefärbten Sektor zwischen West und Nordwest liegen, wie es in **(A)** der Fall ist.



6. Das Volumen eines Zylinders berechnet sich als „Grundfläche mal Höhe“. Für den höheren Zylinder beträgt die Höhe x, während die Grundfläche ein Kreis mit Umfang y ist. Da ein Kreisumfang U sich aus dem Radius r berechnet als $U = 2r\pi$, erhalten wir $r = \frac{U}{2\pi} = \frac{y}{2\pi}$. Die Fläche A beträgt dann $A = r^2\pi = (\frac{y}{2\pi})^2 \cdot \pi = y^2 \cdot \frac{1}{4\pi}$. Insgesamt ergibt sich somit ein Volumen von $V_h = x \cdot y^2 \cdot \frac{1}{4\pi}$.

   Für den anderen Zylinder sind die Rollen von x und y vertauscht, also beträgt sein Volumen $V_n = y \cdot x^2 \cdot \frac{1}{4\pi}$. Betrachtet man das Verhältnis der beiden, so kürzt die Konstante $\frac{1}{4\pi}$ sich weg, und es bleibt ein Verhältnis von $V_h : V_n = xy^2 : yx^2$, oder gekürzt $\mathbf{y : x}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Mit ein wenig Erfahrung kann man dieses „Herauskürzen“ eines konstanten Faktors auch durchführen, ohne ihn überhaupt erst auszurechnen, indem wir nur unterscheiden, ob sich zwei Größen zueinander „linear“ oder „quadratisch“ (oder „kubisch“ oder ...) verhalten. Dazu betrachten wir, wie die zweite Größe sich verändert, wenn die erste mit einer positiven reellen Zahl t multipliziert wird. Wird die zweite Größe ebenfalls mit t multipliziert (zum Beispiel: doppelter Radius bei einem Kreis ergibt doppelten Umfang), so sagen wir, die Größen verhalten sich linear. Wird die zweite Größe mit t^2 multipliziert (zum Beispiel: doppelter Radius ergibt vierfache Fläche), so sagen wir, sie verhalten sich quadratisch. Wird die Größe mit t^3 multipliziert (zum Beispiel: doppelte Seitenlänge eines Würfels ergibt achtfaches Volumen), so sagen wir, sie verhält sich kubisch. Auch andere Verhältnisse sind möglich, wobei diese drei (linear, quadratisch und kubisch für ein-, zwei- bzw. dreidimensionale Objekte) im Alltag am häufigsten auftreten.

Die Fläche eines Kreises verhält sich quadratisch zu seinem Radius, und der Radius verhält sich linear zum Umfang. Somit verhält sich auch die Fläche quadratisch zum Umfang, oder anders ausgedrückt: Wenn die Umfänge der Zylinder sich wie $y : x$ verhalten, verhalten ihre Grundflächen sich wie $y^2 : x^2$. Die Höhen sind genau gleich der jeweils anderen Seite des Blattes und verhalten sich daher wie $x : y$. Das Volumen verhält sich wie das Produkt dieser Verhältnisse, also wie $y^2x : x^2y = \mathbf{y : x}$.

7. Da $\pi < 4$ ist, liegt x zwischen 0 und 1. Für eine solche Zahl gilt, dass x^y umso größer ist, je kleiner y ist. Von den fünf zur Auswahl stehenden Hochzahlen 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{4}$ am kleinsten, also $x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$ am größten.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

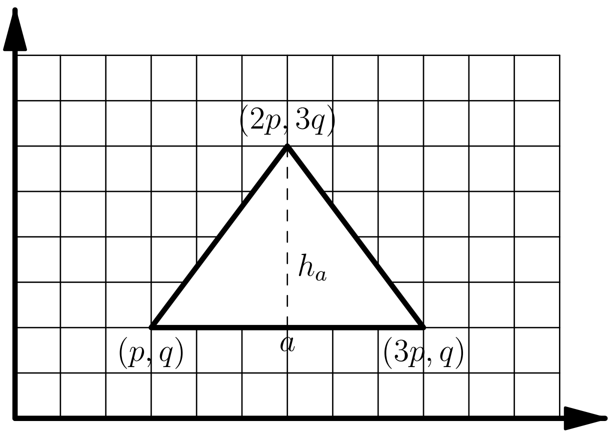
   Natürlich kann man (nach dem Wettbewerb) obige Überlegung auch mit einem Taschenrechner verifizieren und erhält

$$x = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785, \qquad x^4 \approx 0{,}381, \qquad x^2 \approx 0{,}617, \qquad \sqrt{x} \approx 0{,}886, \qquad \sqrt[4]{x} \approx 0{,}941.$$

8. Eine Zahl ist bekanntlich genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist. Außer bei drei gleichen Ziffern (wo die Ziffernsumme das Dreifache dieser Ziffer beträgt) ist das nur möglich, wenn jede der Ziffern genau ein Mal vorkommt. (Sobald man zwei beliebige verschiedene Ziffern aus der Menge $\{1, 3, 5\}$ festlegt, kann man jeweils sofort ausrechnen, dass nur die dritte Ziffer die Summe auf eine durch drei teilbare Zahl ergänzt.)

   Es gibt also einerseits die drei Zahlen 111, 333 und 555, und andererseits sechs Möglichkeiten, drei verschiedene Ziffern anzuordnen, nämlich 135, 153, 315, 351, 513 und 531. Insgesamt existieren daher **9** solche Zahlen.

9. Die Fläche eines Dreiecks lässt sich auf viele Arten berechnen, unter anderen aber als „Grundlinie mal Höhe Halbe“. Bei dieser Aufgabe sehen wir schnell, dass wir eine sehr bequeme Grundlinie zur Auswahl haben, die parallel zur x-Achse des Koordinatensystems (also waagrecht) verläuft, da die ersten beiden Punkte dieselbe y-Koordinate q haben. Die Länge a dieser Grundlinie beträgt $a = 3p - p = 2p$.



   Die dazugehörige Höhe h_a lässt sich als Abstand zu dieser Grundlinie direkt aus der Differenz der y-Koordinate des dritten Punktes zur Grundlinie ablesen, also $h_a = 3q - q = 2q$.

   Für die Fläche A des Dreiecks ergibt sich somit $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{2p \cdot 2q}{2} = \mathbf{2pq}$.

10. Wir gehen zunächst einmal davon aus, dass er doch ausreichend vorsichtig davonläuft, dass die Rolle nicht wie wild herumschaukelt. Die Dicke der Rolle ergibt sich aus der Anzahl der noch aufgewickelten Lagen. Um eine erste vollständige Lage abzuwickeln, muss der Hund relativ weit laufen. Die zweite Lage ist schon ein kleines Stückchen kürzer, weil der Radius kleiner geworden ist, und so weiter. Die letzte kurze Lage direkt am Karton ist ganz schnell abgewickelt.

    Der Durchmesser nimmt also die ganze Zeit über ab, wobei die Abnahme gegen Ende immer schneller wird. Ein solcher Verlauf ist in **(E)** dargestellt.

11. Zunächst betrachten wir die Parabel an der Stelle $x = 0$ und stellen fest, dass sie die y-Achse im Punkt $(0, c)$ schneidet. Eine Gerade geht genau dann dort durch die y-Achse, wenn ihr konstanter Term gleich c ist. Wegen $a \neq c$ und $b \neq c$ schließt das alle Möglichkeiten außer $y = ax + c$ und $y = bx + c$ aus.

    Von diesen beiden bemerken wir, dass die Gleichung $y = bx + c$ verdächtig ähnlich zu jener der Parabel $y = ax^2 + bx + c$ aussieht. Schneiden wir die beiden, so erhalten wir aus $ax^2 + bx + c = bx + c$, was sich zu $ax^2 = 0$ vereinfacht, sofort die Doppellösung $x = 0$ (oder $a = 0$, was aber keine Parabel wäre). Tatsächlich ist $y = bx + c$ die Tangente an die Parabel im Punkt $(0, c)$ (wie wir auch verifizieren können, indem wir die Ableitung der Parabel berechnen und feststellen, dass diese an der Stelle $x = 0$ eine Steigung von b hat).

    Es bleibt somit nur die Möglichkeit $\mathbf{y = ax + c}$ übrig.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Wir sollten (zumindest nach Ende des Wettbewerbes) dennoch noch darüber nachdenken, ob diese tatsächlich auch auftreten kann und für geeignete (paarweise verschiedene) a, b, c eine Figur wie in der gegebenen Abbildung erzeugt. Das Beispiel $a = 1$, $b = 4$, $c = 3$, also Parabel $y = x^2 + 4x + 3$ und Gerade $y = x + 3$, ist solch ein Beispiel, wie man durch Zeichnung oder Berechnung der Nullstellen leicht verifiziert.

    Im Anhang finden sich weitere Betrachtungen darüber, wie man alle möglichen Parabeln mit dieser Eigenschaft bestimmt, sowie über weitere interessante Eigenschaften solcher Parabeln.

12. Wir betrachten die vier Intervalle $A_1 = (0, 1)$, $A_2 = (2, 3)$, $B_1 = (1, 2)$ und $B_2 = (3, 4)$ separat. Für $a \in A_1$ und $b \in B_1$ gilt $1 = 0 + 1 < a + b < 1 + 2 = 3$, also können wir alle Zahlen im Intervall $(1, 3)$ so bilden, aber keine anderen. Für $a \in A_2$ und $b \in B_1$ gilt $3 = 2 + 1 < a + b < 3 + 2 = 5$, aber auch für $a \in A_1$ und $b \in B_2$ gilt $3 = 0 + 3 < a + b < 1 + 4 = 5$, also können wir jeweils genau die Zahlen im Intervall $(3, 5)$ bilden. Für $a \in A_2$ und $b \in B_2$ schließlich gilt $5 = 2 + 3 < a + b < 3 + 4 = 7$, also können wir genau alle Zahlen im Intervall $(5, 7)$ so bilden. Die Vereinigung dieser Intervalle ergibt $\mathbf{(1, 3) \cup (3, 5) \cup (5, 7)}$.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Wenn man mathematisch ganz ganz streng sein will, haben wir hier bislang nur bewiesen, dass keine Zahlen *außerhalb* dieser Vereinigung gebildet werden können und müssen jetzt für alle darin noch eine konkrete Konstruktionsvorschrift angeben. Dass man aber zum Beispiel die Zahl 2,77, die im Intervall $(1, 3)$ liegt, tatsächlich als Summe einer Zahl a aus dem Intervall $(0, 1)$ und einer Zahl b aus dem Intervall $(1, 2)$ bilden kann, ist wenig überraschend und daher verzichten wir hier auf einen mathematisch exakten Beweis.

13. Eine Erhöhung um 99 können wir, um es uns beim Rechnen etwas leichter zu machen, als eine Erhöhung um 100 gefolgt von einer Subtraktion von 1 sehen. Die Einerstelle der ursprünglichen Zahl kann nicht 0 sein, was wir auf verschiedene Arten leicht argumentieren können: Zum Beispiel ändert die mittlere Stelle sich beim Umkehren der Reihenfolge nicht; würde man von einer auf 0 endenden Zahl 1 abziehen, gäbe es aber einen Übertrag und die Zehnerstelle würde sich ebenfalls ändern. Andererseits ergäbe das Umkehren der Ziffernreihenfolge einer Zahl, die auf 0 endet, eine zweistellige (oder sogar einstellige) Zahl, die also sicher nicht größer als die ursprüngliche dreistellige Zahl ist.

    Somit gibt es beim Rechnen keine Überträge, sondern die Hunderterstelle erhöht sich um 1 und die Einerstelle verringert sich um 1. Andererseits sind Einer- und Hunderterstelle zwischen den beiden Zahlen auch vertauscht, also muss es sich um zwei aufeinanderfolgende Ziffern handeln. Ein mögliches solches Zahlenpaar wäre 485 und 584.

    Für die Hunderterziffer kommen dabei alle Ziffern von 1 bis 8 in Frage, die Einerziffer ist immer genau 1 höher. Für die Zehnerziffer ist jede Ziffer möglich, und alle Kombinationen sind möglich. Das ergibt insgesamt $8 \cdot 10 = \mathbf{80}$ solche Zahlen.

14. Da die genauen Zahlen irrelevant sind und nur zählt, ob eine Zahl gerade oder ungerade ist, betrachten wir Anordnungen von 500 „g“ und 500 „u“, die jeweils für eine beliebige gerade bzw. ungerade Zahl stehen. (Ob eine Zahl gerade oder ungerade ist, wird auch als „Parität“ dieser Zahl bezeichnet.)

    Nehmen wir an, es wäre möglich, dass alle 998 Summen ungerade sind. Da aus der Festlegung der ersten zwei Zahlen (zusammen mit der Forderung, dass alle Summen ungerade sein müssen) alle weiteren Paritäten eindeutig folgen, es für die ersten zwei Zahlen aber nur die vier Möglichkeiten „g, g“, „g, u“, „u, g“ und „u, u“ gibt, sehen wir, dass sich entweder ein Muster „…, u, g, g, u, g, g, …“ ergibt, das sich in beide Richtungen beliebig weit fortsetzt, oder ein Muster „…, u, u, u, u, u, u, …“.

    Im ersten Fall müssten aber etwa zwei Drittel der Zahlen von 1 bis 1000 gerade sein, was nicht der Fall ist, im zweiten Fall kämen überhaupt keine geraden Zahlen vor.

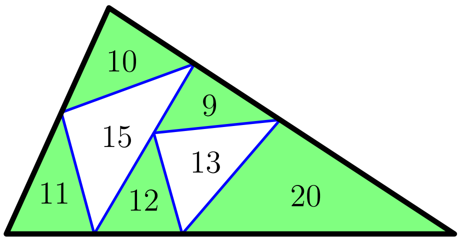
    Folglich ist es nicht möglich, dass alle 998 Summen ungerade sind. Wir schaffen aber eine Anordnung mit nur einem einzigen Fehler, indem wir die beiden Muster an der passenden Stelle zusammenfügen. Von links beginnen wir also mit einem sich wiederholenden Muster „u, g, g“, so lange, bis wir alle 500 geraden Zahlen verteilt haben. Zu diesem Zeitpunkt stehen 750 Zahlen in der Reihe. Den Rest füllen wir mit den verbleibenden 250 ungeraden Zahlen „u“ auf. Wir haben schon gezeigt, dass innerhalb jedes Musters alle Summen ungerade sind. Zu betrachten bleibt nur die Übergangsstelle zwischen erstem und zweitem Muster, die die Form

    …, u, g, g, u, g, g, u, g, g, u, u, u, u, u, u, u, u, u, …

    hat. Hier können wir leicht überprüfen, dass darin nur an einer Stelle (nämlich bei „g, u, u“) eine gerade Summe auftritt.

    Somit schaffen wir es, dass **997** der 998 Summen ungerade sind.

15. Wenn wir die Umfänge der hier grün dargestellten Dreiecke addieren, so haben wir jede Linie in der Figur genau ein Mal gezählt.

    Das ist etwas mehr, als wir haben wollen, nämlich genau um die blau markierten Linien zu viel. Deren Gesamtlänge lässt sich aber recht einfach ausrechnen: Sie entspricht genau dem Umfang der beiden weißen Dreiecke.

    Der Umfang des großen Dreiecks beträgt daher $11 + 12 + 20 + 9 + 10 - 15 - 13 = \mathbf{34}$.

16. Für alle Zahlen N, die auf 0 enden, ist $p(N) = 0$, daher können wir sie einfach weglassen.

    Für die verbleibenden Zahlen mit der Zehnerziffer 1 erhalten wir die Summanden $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$.

    Für die Zahlen mit der Zehnerziffer 2 erhalten wir die Summanden $2\cdot1+2\cdot2+\cdots+2\cdot9 = 2\cdot(1+2+\cdots+9) = 2 \cdot 45$.

    Dies wiederholt sich: Für jede Zehnerziffer k erhalten wir die Summanden $k \cdot 1 + k \cdot 2 + \cdots + k \cdot 9 = k \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = k \cdot 45$.

    Am Ende können wir noch ein weiteres Mal 45 herausheben und erhalten für die Summe S somit insgesamt:

$$\begin{aligned} S &= p(11) + \cdots + p(19) + p(21) + \cdots + p(29) + \cdots + p(91) + \cdots + p(99) \\ &= 1 \cdot 45 + 2 \cdot 45 + \cdots + 9 \cdot 45 \\ &= (1 + 2 + \cdots + 9) \cdot 45 \\ &= 45^2 = \mathbf{2025}. \end{aligned}$$

17. Wir bezeichnen die Zahlen hinter vier der Kleckse wie abgebildet mit a, b, c und d.

	16		22	
20	a	21	b	2
	25		1	
24	c	5	d	6
	4		?	

Da alle Zeilen- und Spaltensummen gleich sind, muss die Summe von zweiter und vierter Zeile minus die Summe von zweiter und vierter Spalte gleich 0 sein, also

$$(20 + a + 21 + b + 2) + (24 + c + 5 + d + 6) - (16 + a + 25 + c + 4) - (22 + b + 1 + d + ?) = 0$$
$$10 - ? = 0,$$

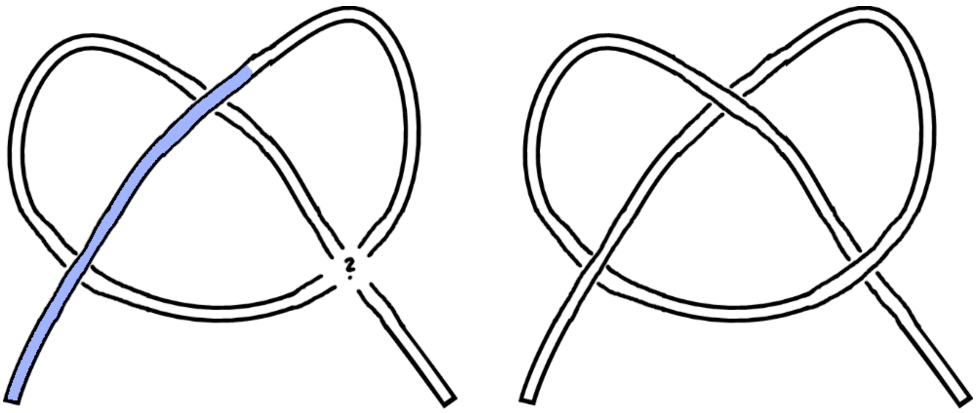
woraus sofort ? = **10** folgt.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Wenn man den schönen Trick nicht gleich sieht, kann man es sich – prinzipiell unter Ausnutzung derselben doppelt vorkommenden Kleckse – auch schrittweise herleiten. Die zweite Zeile hat eine Summe von $20 + a + 21 + b + 2 = 43 + a + b$, die zweite Spalte von $16 + a + 25 + c + 4 = 45 + a + c$. Da diese beiden gleich groß sein sollen und das a sich beim Gleichsetzen wegkürzt, folgt $b = c + 2$.

Für die vierte Zeile gilt nun $24 + c + 5 + d + 6 = 35 + c + d$ und für die vierte Spalte $22 + (c + 2) + 1 + d + ? = 25 + c + d + ?$. Setzt man diese gleich und kürzt, so ergibt sich ? = 10.

18. Liegt der Teil der Schnur, der von links unten kommt (hier blau dargestellt), bei den beiden ersten Kreuzungen, die er passiert, jedes Mal oben, so kann man ihn nach oben wegheben, die Schlaufe darunter herausziehen und sieht, dass man keinen Knoten hat. Genau dasselbe (gespiegelt an der Ebene der Tischplatte sozusagen) passiert, wenn dieser Teil beide Male unten liegt. Falls die linke und die obere Kreuzung also gleich aussehen, gibt es keinen Knoten.



Dasselbe gilt, wenn die rechte und die obere Kreuzung gleich aussehen.

Einen Knoten könnte es also nur noch geben, wenn die obere Kreuzung eine der beiden Formen hat und die unteren beiden jeweils die andere. Tatsächlich sehen wir, dass es sich in diesem Fall um einen „normalen“ einfachen Knoten handelt.

Insgesamt gibt es 8 Möglichkeiten, wie die Schnur liegen kann. Dabei sehen jeweils entweder alle drei Stellen gleich aus, oder zwei sehen gleich aus und die dritte anders. Davon erhalten wir nur bei jenen beiden Möglichkeiten, wo die unteren beiden Kreuzungen gleich aussehen und die obere anders, einen Knoten, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{8} = \mathbf{\frac{1}{4}}$ ergibt.

19. Wir betrachten zunächst die Primfaktorisierung von 7! und erhalten $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

    Wir erhalten alle Teiler, wenn wir alle Möglichkeiten betrachten, eine Teilmenge dieser Faktoren (also bis zu vier Zweier, bis zu zwei Dreier, maximal einen Fünfer und maximal einen Siebener) zu multiplizieren. Davon sind genau jene gerade, die mindestens einen Zweier enthalten.

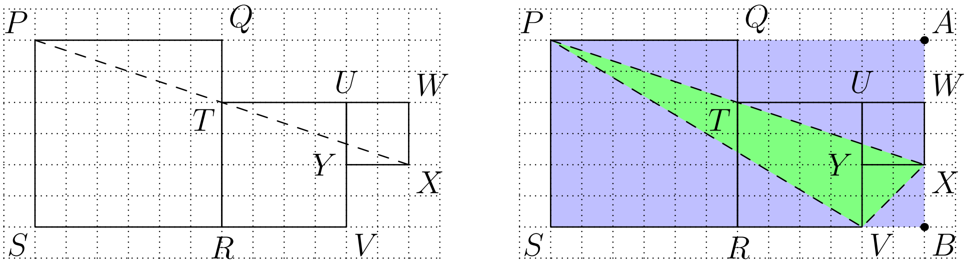
    Wenn wir diese Möglichkeiten systematisch aufschreiben, können wir zuerst alle aufschreiben, die vier Zweier enthalten, dann alle, die drei Zweier enthalten, dann alle mit zwei Zweiern, alle mit einem Zweier und schließlich alle ohne Zweier. Beim systematischen Aufschreiben der restlichen Kombinationen fällt uns aber vielleicht auf, dass wir jedes Mal dieselben – und damit insbesondere auch gleich viele – Kombinationen aus Dreiern, Fünfern und Siebenern aufschreiben. Wir haben also fünf gleich große Gruppen, von denen vier mindestens einen Zweier enthalten und die letzte nicht, womit genau $\mathbf{\frac{1}{5}}$ der Teiler ungerade ist.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Die Anzahl der Teiler lässt sich genau über diese Idee des systematischen Aufschreibens auch leicht ausrechnen: Wir können 0, 1, 2, 3 oder 4 Zweier verwenden, 0, 1 oder 2 Dreier, 0 oder 1 Fünfer und 0 oder 1 Siebener, wobei alle Kombinationen daraus erlaubt sind. Das gibt $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$ Teiler.

    Dürfen wir keinen Zweier verwenden, bleiben $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten übrig.

20. Wir zeichnen die Skizze einmal auf kariertem Papier, wobei wir aus den Flächen sofort ausrechnen, dass die Seitenlängen von $PQRS$ und $TRVU$ gleich 6 bzw. 4 sind.



    Die Vermutung, dass die Seitenlänge von $UWXY$ gleich 2 ist, lässt sich durch Kästchenzählen leicht überprüfen: Gehen wir von T der Geraden PT weiter folgend um 6 nach rechts und um 2 nach unten (also genau um den Vektor PT), so landen wir am selben Punkt, wie wenn wir von U im 45°-Winkel (also entlang der Diagonale des Quadrats $UWXY$) um 2 nach rechts und um 2 nach unten gehen.

    Nun bleibt nur noch, die Fläche von PXV zu berechnen, wofür wir zwei weitere Gitterpunkte A und B wie abgebildet einzeichnen, und die Fläche nun aus mehreren leicht berechenbaren rechtwinkeligen Dreiecken und Rechtecken zusammensetzen. Konkret berechnen wir zuerst die gesamte Fläche des farbigen Rechtecks $PSBA$ und ziehen davon die drei blauen Dreiecke wieder ab, womit wir

$$\begin{aligned}[PXV] &= [PSBA] - [PAX] - [VBX] - [PSV] \\ &= (12 \cdot 6) - \frac{12 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{10 \cdot 6}{2} \\ &= 72 - 24 - 2 - 30 = \mathbf{16}\end{aligned}$$

    erhalten.

21. Wir überlegen zuerst, für welche Werte die Funktion gleich 0 wird und finden die einzigen vier Lösungen $f(-4) = 0$, $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$ und $f(4) = 0$. Damit $f(f(x)) = 0$ ist, muss demnach $f(x)$ gleich -4, -2, 2 oder 4 sein.

    - Für $f(x) = -4$ existieren keine Lösungen (da im Graph keine zu sehen sind und die Funktion außerhalb von $[-5, 5]$ gar nicht definiert ist).
    - Für $f(x) = -2$, also einen Schnitt der Funktion mit einer waagrechte Linie bei $y = -2$, existieren zwei Lösungen ungefähr bei $-3{,}3$ und bei $-2{,}3$. (Die genauen Werte sind nicht wichtig, nur die Anzahl der Lösungen.) Es gilt also zum Beispiel $f(f(-3{,}3)) = f(-2) = 0$.
    - Für $f(x) = 2$ existieren vier Lösungen, die wir auf dieselbe Art ablesen können, eine etwa bei $-4{,}4$, eine bei -1, eine bei $+1$ und eine etwa bei $4{,}6$.
    - Für $f(x) = 4$ schließlich existieren zwei Lösungen sehr nahe an -5 und 5.

    Insgesamt haben wir **8** Lösungen gefunden.

22. Wir nennen die beiden Spieler A und B und die Summe ihrer Kartenwerte a bzw. b, wobei $a = 2b$ gilt. Die Summe aller genommenen Karten $a + b = 2b + b = 3b$ ist durch 3 teilbar.

    Betrachten wir die Summe aller 7 Karten, so ist $1+2+7+9+10+15+19 = 63$ ebenfalls durch 3 teilbar, also muss die am Tisch verbliebene Karte einen durch 3 teilbaren Wert haben. Das schließt alles bis auf 9 und 15 aus.

    Nehmen wir an, 15 wäre die verbliebene Karte, dann wäre die Summe der genommenen Karten gleich $63 - 15 = 48$, also $a = 32$ und $b = 16$. Wir sehen schnell, dass wir hier keine tatsächliche Zuteilung der Karten finden: Die Karte 19 muss jedenfalls bei A landen, weil die Summe für B sonst schon mit dieser einen Karte zu hoch wäre. Es gibt aber keine Möglichkeit, zwei Karten auf die fehlenden $32 - 19 = 13$ zu kombinieren. (Auch viele andere Argumentationen, warum keine Zuordnung möglich ist, sind denkbar.)

    Somit muss die Karte **9** am Tisch bleiben, für die wir tatsächlich die Zuordnung $a = 7+10+19 = 36$ und $b = 1+2+15 = 18$ finden.

23. Die 12 Fünfecke haben in Summe $12 \cdot 5 = 60$ Kanten. Jedes Quadrat verwendet genau zwei davon, also existieren $60/2 = 30$ Quadrate.

    Bei jedem Quadrat grenzen zwei Kanten an Fünfecke und zwei an Dreiecke, somit gibt es auch 60 Kanten, die an Dreiecke grenzen. Jedes Dreieck benötigt 3 davon, also gibt es $60/3 = 20$ Dreiecke.

    Insgesamt erhalten wir als Summe der Zahlen auf der Oberfläche daher $12 \cdot 5 + 30 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 = 60 - 30 + 20 =$ **50**.

24. Hier existieren zahlreiche Varianten, geschickt abzuzählen. Wichtig ist jeweils nur, alle Möglichkeiten zu finden und keine doppelt zu zählen.

    Wir bezeichnen als „Größe" einer Dreiecksseite für diese Aufgabe die Anzahl der Punkte, um die man entlang vom Kreis weitergehen muss, um zum nächsten Eckpunkt zu kommen. Dabei sehen wir, dass die Summe der drei Größen immer 15 ergibt (eine ganze Runde um den Kreis). Weil Drehungen und Spiegelungen egal sind, suchen wir daher also eigentlich nur alle Arten, 15 als Summe von drei positiven ganzen Zahlen zu bilden.

    Wir machen eine Fallunterscheidung nach der größten auftretenden Zahl.

    - Es gibt keine Möglichkeit, die eine Zahl größer als 13 enthält, weil jede Zahl mindestens 1 sein muss und die Summe daher größer als 15 wäre.
    - Tritt 13 als größte Zahl auf, so existiert (bis auf Vertauschungen der Reihenfolge) nur die Möglichkeit $13 + 1 + 1$.
    - Tritt 12 auf, so existiert ebenfalls nur die Möglichkeit $12 + 2 + 1$.
    - Tritt 11 auf, so haben wir die Möglichkeiten $11 + 3 + 1$ und $11 + 2 + 2$.
    - Tritt 10 auf, so haben wir die Möglichkeiten $10 + 4 + 1$ und $10 + 3 + 2$.
    - Tritt 9 auf, so haben wir die Möglichkeiten $9 + 5 + 1$, $9 + 4 + 2$ und $9 + 3 + 3$.
    - Tritt 8 auf, so haben wir die Möglichkeiten $8 + 6 + 1$, $8 + 5 + 2$ und $8 + 4 + 3$.
    - Tritt 7 auf, so haben wir die Möglichkeiten $7 + 7 + 1$, $7 + 6 + 2$, $7 + 5 + 4$ und $7 + 4 + 4$.
    - Ist 6 die größte Zahl, so müssen wir nun erstmals darauf achten, dass wir keine Möglichkeiten mit einer größeren Zahl als 6 nochmals zählen, zum Beispiel $6+8+1$, was wir bereits als $8+6+1$ gezählt haben. Es bleiben somit nur $6 + 6 + 3$ und $6 + 5 + 4$, die wir noch nicht gesehen haben.
    - Mit 5 als größter Zahl gibt es nur die Möglichkeit $5 + 5 + 5$.
    - Kleiner als 5 kann die größte Zahl nicht sein, weil die Summe der drei Zahlen sonst kleiner als 15 wäre.

    Insgesamt haben wir daher $1+1+2+2+3+3+4+2+1 =$ **19** Möglichkeiten gefunden.

25. Wegen $f(x+1) = f(x) \cdot f(1) = f(x) \cdot 2$ gilt

    $$\frac{f(x+1)}{f(x)} = 2$$

    für alle x. Daher haben alle Brüche $\frac{f(2)}{f(1)}, \frac{f(3)}{f(2)}, \frac{f(4)}{f(3)}, \ldots$, die in der gegebenen Summe auftreten, stets denselben Wert 2. Anhand der Nenner erkennen wir, dass es 2020 Brüche sind, daher beträgt die Summe **4040**.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Wenn uns die Rechenregeln für Exponentialfunktionen ein wenig geläufig sind – die bekannte Rechenregel $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ schaut der Bedingung ja auf den ersten Blick recht ähnlich –, dann vermuten wir recht schnell, dass $f(x) = 2^x$ eine mögliche Funktion sein könnte, und überprüfen dafür auch leicht, dass $f(1) = 2^1 = 2$ und $f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ tatsächlich erfüllt sind.

Dann gilt aber

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{2^{x+1}}{2^x} = 2$$

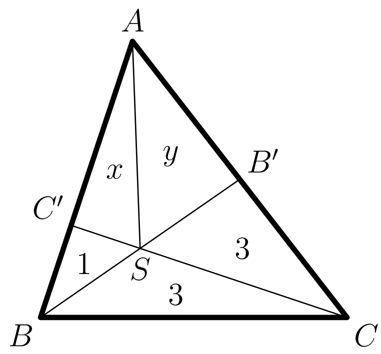
für alle x, also hat wie zuvor jeder Bruch den Wert 2.

Falls wir eine mögliche Funktion nicht gleich erraten (oder Sorge haben, die Lösung könnte nicht eindeutig sein), können wir auch die Funktionswerte an den benötigten Stellen ausrechnen. Dabei können wir für alle positiven ganzen Zahlen x die Rechenregel immer wieder anwenden und erhalten

$$f(x) = f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{x}) = f(1) \cdot f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{x-1}) = \cdots = \underbrace{f(1) \cdot f(1) \cdots f(1)}_{x} = (f(1))^x = 2^x.$$

Die Funktion hat für alle positiven ganzen Zahlen x also tatsächlich den Wert $f(x) = 2^x$. Mit ähnlichen Überlegungen können wir das sogar für alle rationalen Zahlen zeigen. Ob die Funktion an allen irrationalen Stellen ebenfalls so definiert ist, ist aber nicht eindeutig bestimmt.

26. Seien BB' und CC' die beiden Strecken und S ihr Schnittpunkt. Wir zeichnen wie abgebildet eine weitere Strecke SA ein und bezeichnen die Fläche $[C'SA]$ mit x und die Fläche $[B'SA]$ mit y.



Wir werden nun wiederholt nutzen, dass die Fläche eines Dreiecks sich als „Grundlinie mal Höhe Halbe“ berechnet. Haben zwei Dreiecke dieselbe Höhe, so verhalten sich ihre Flächen zueinander daher gleich wie ihre Grundlinien.

Da die Dreiecke BSC und $B'SC$ den gleichen Flächeninhalt und die gleiche Höhe durch C haben, müssen auch ihre Grundlinien gleich lang sein, also $BS = SB'$.

Für die Dreiecke BSA und $B'SA$, die damit gleich lange Grundlinien BS bzw. $B'S$ und auch die gleiche Höhe durch A haben, folgt, dass ihre Flächeninhalte gleich groß sein müssen, also $1 + x = y$.

Andererseits gilt für die Dreiecke CSB und $C'SB$, dass sie dieselbe Höhe durch B haben, aber eines drei Mal so groß ist wie das andere, also muss auch die Grundlinie CS drei Mal so lang sein wie die Grundlinie $C'S$.

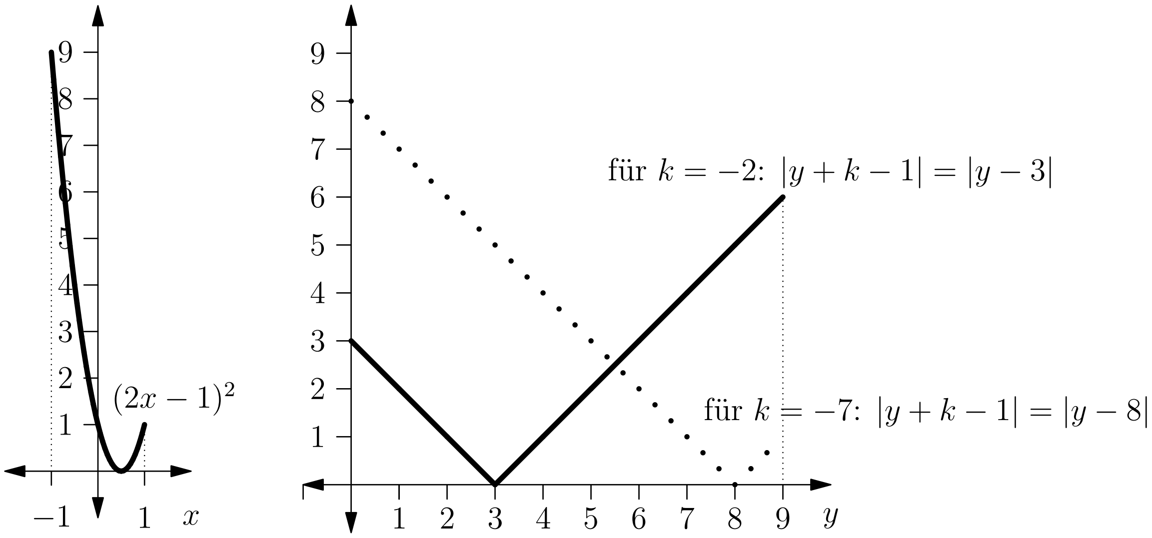
Dann folgt in den Dreiecken CSA und $C'SA$ mit derselben Höhe durch A aus dem Verhältnis der Grundlinien schließlich $[CSA] = 3 \cdot [C'SA]$, also $3 + y = 3 \cdot x$.

Lösen wir das Gleichungssystem $1+x = y$ und $3+y = 3x$, beispielsweise indem wir die beiden Gleichungen addieren, so erhalten wir $4+x+y = y+3x$, also $4 = 2x$, folglich $x = 2$ und $y = 1+x = 3$. Die Gesamtfläche ist dann $x + y + 3 + 3 + 1 =$ **12**.

27. Mit dem Trick, auf ein vollständiges Quadrat zu ergänzen, gilt

$$|4x^2 - 4x + k| = |4x^2 - 4x + 1 - 1 + k| = |(2x-1)^2 + k - 1|.$$

Dabei ist $(2x-1)^2$ eine nach oben offene Parabel, die die x-Achse bei $x = \frac{1}{2}$ berührt, siehe linke Abbildung. Für x im Intervall $[-1, 1]$ nimmt sie ihren größten Wert demnach am weitesten weg von ihrem Tiefpunkt an, also bei $x = -1$ mit $(2 \cdot (-1) - 1)^2 = (-3)^2 = 9$.

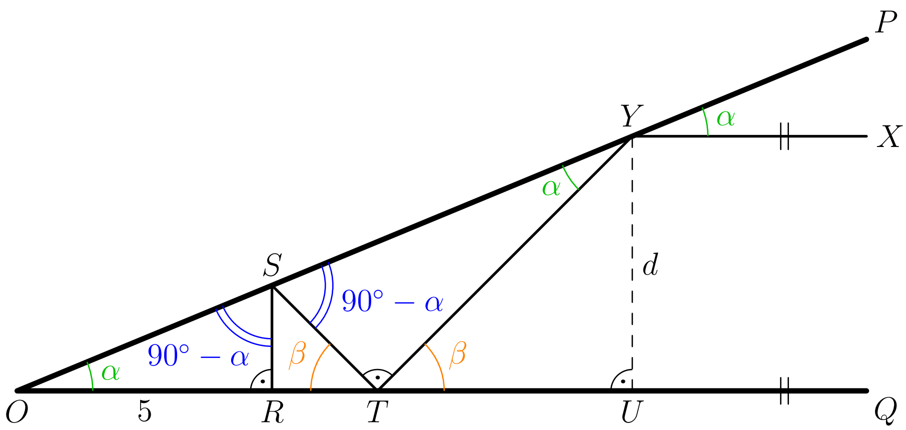


Der Ausdruck $(2x-1)^2$ nimmt also alle Werte von 0 bis 9 an, und wir können die Aufgabe dazu vereinfachen, dass $M(k)$ der maximale Wert von $|y + k - 1|$ für y im Intervall $[0, 9]$ ist.

Da k in diesem Kontext eine Konstante ist, ist $|y+k-1|$, wenn wir es als Funktion in y betrachten, einfach der Absolutwert einer Geraden (siehe rechte Abbildung), und daher erkennen wir, dass das Maximum entweder für $y = 0$ oder für $y = 9$ angenommen wird (oder für beide).

Am kleinsten wird dieses Maximum, wenn der „Knick“ in $|y + (k-1)|$ möglichst mittig zwischen 0 und 9 liegt, also für $(k-1) = -\frac{9}{2}$, somit $M(k)$ als Maximum von $|y - \frac{9}{2}|$, und es gilt $|0 - \frac{9}{2}| = |9 - \frac{9}{2}| = \mathbf{\frac{9}{2}}$.

28. Wir bezeichnen die Punkte, wo der Strahl auf einen der Spiegel trifft, wie in der folgenden Abbildung.



Sei $\alpha := \sphericalangle ROS$. Da OQ und YX parallel sind, gilt wegen dem Parallelwinkelsatz $\sphericalangle XYP = \sphericalangle ROS = \alpha$, und wegen dem physikalischen Spiegelungsgesetz „Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel“ ist auch $\sphericalangle TYS = \sphericalangle XYP = \alpha$.

Im rechtwinklingen Dreieck ORS gilt $\sphericalangle RSO = 90° - \sphericalangle ROS = 90° - \alpha$, und wegen dem Spiegelungsgesetz ist auch $\sphericalangle TSY = \sphericalangle RSO = 90° - \alpha$.

Dann folgt aus der Winkelsumme im Dreieck STY sofort, dass der dritte Winkel $\sphericalangle YTS$ ein rechter Winkel sein muss, und die Dreiecke ORS und YTS sind ähnlich.

Wegen dem Spiegelungsgesetz gilt auch $\sphericalangle STR = \sphericalangle YTU =: \beta$. Da die Dreiecke STR und YTU darüber hinaus beide einen rechten Winkel haben, sind auch sie zueinander ähnlich.

Nutzen wir nun zuerst die Ähnlichkeit zwischen ORS und YTS und dann jene zwischen STR und YTU, so erhalten wir

$$OR : RS = YT : TS = YU : RS.$$

Daraus kürzt sich die Länge RS weg, und es bleibt $OR = YU$, also $d = \mathbf{5}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Tatsächlich können wir viel mehr ausrechnen (und damit auch etwas schrittweiser und ohne Benutzung von Verhältnissen zum Ziel kommen).

Rund um den Punkt T gilt $180° = \sphericalangle UTY + \sphericalangle YTS + \sphericalangle STR = \beta + 90° + \beta$, also $\beta = 45°$, womit SRT und YUT gleichschenkelige rechtwinkelige Dreiecke („Geodreiecke“) sind.

Sei $x := RS$. Im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck SRT gilt dann bekanntlich $TS = SR \cdot \sqrt{2} = x \cdot \sqrt{2}$.

Nun sind ORS und YTS ähnlich, also gilt

$$\begin{aligned} YT : OR = TS : RS \quad &\iff \\ \frac{YT}{5} = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{x} \quad &\iff \\ YT = 5 \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dann gilt schließlich im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck YUT, dass

$$d = YU = \frac{YT}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5.$$

Übrigens können wir rund um den Punkt S auch noch $180° = \sphericalangle OSR + \sphericalangle RST + \sphericalangle TSY = 90° - \alpha + 45° + 90° - \alpha$ ablesen, also $\alpha = 22{,}5°$. Rein aus der Beschreibung, dass der Lichtstrahl zuerst parallel und nach drei Spiegelungen normal auf den Spiegel steht, lässt sich also sogar der Winkel zwischen den beiden Spiegeln eindeutig bestimmen, was zwar für die Lösung der Aufgabe nicht nötig, aber eine interessante Beobachtung ist.

29. Da das Spiel bei einem Vorsprung von drei Punkten endet, gibt es nur 7 mögliche Spielsituationen. Wir überlegen, wie groß in jeder dieser Situationen die Wahrscheinlichkeit ist, dass Anton gewinnt. Bei einem Vorsprung von +3 Punkten hat er bereits gewonnen, gewinnt also zu 100%. Bei einem Vorsprung von −3 Punkten, also einem Vorsprung für Bernd von 3 Punkten, hat Bernd gewonnen, also gewinnt Anton zu 0%. Bei einem Vorsprung von ±0 Punkten, also bei Gleichstand, ist es wegen der Symmetrie für beide gleich wahrscheinlich zu gewinnen, also jeweils 50%.

Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, dass Anton bei einem Vorsprung von +1 Punkt gewinnt, mit x, und die Wahrscheinlichkeit, dass er bei einem Vorsprung von +2 Punkten gewinnt, mit y. Wegen der Symmetrie ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Vorsprung von −1 und −2 Punkten gleich $100\% - x$ bzw. $100\% - y$. (Wenn Bernd einen Vorsprung von zwei Punkten hat, ist die Wahrscheinlichkeit, dass Bernd gewinnt, gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass Anton gewinnt wenn Anton einen Vorsprung von zwei Punkten hat.)

Vorsprung von Anton:	+3	+2	+1	±0	−1	−2	−3
Gewinnchance für Anton:	100%	y	x	50%	$100\% - x$	$100\% - y$	0%

Um x und y herauszubekommen (wovon x in der Aufgabe gesucht ist), müssen wir jetzt irgendwie ein Gleichungssystem aufstellen, wofür es mehrere Möglichkeiten gibt.

Eine einfache Möglichkeit ist zu sagen, dass nach jedem Münzwurf die Wahrscheinlichkeit, um eine Spalte nach links oder nach rechts zu wandern, gleich groß ist (entweder Anton baut seinen Vorsprung um 1 aus oder verringert ihn um 1). Die Wahrscheinlichkeit, in irgendeiner Situation zu gewinnen, kann man immer ausrechnen, indem man alle von dort möglichen nächsten Schritte betrachtet und jeweils Gewinnwahrscheinlichkeit in diesem Fall mit der Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Falles multipliziert.

Wenn Anton mit $+1$ vorne liegt, tritt mit 50% Wahrscheinlichkeit ein, dass er seinen Vorsprung auf $+2$ ausbaut und dann eine Gewinnchance von y hat. Mit den restlichen 50% Wahrscheinlichkeit verliert er seinen Vorsprung, es herrscht also wieder Gleichstand, und er hat dann eine Gewinnchance von 50%. Also gilt $x = 50\% \cdot y + 50\% \cdot 50\%$, oder, statt in % in Zahlen zwischen 0 und 1 angeschrieben, $x = 0{,}5 \cdot y + 0{,}5 \cdot 0{,}5$.

Dieselbe Überlegung gilt bei einem Vorsprung von $+2$: In der Hälfte der Fälle gewinnt er im nächsten Zug, in der anderen Hälfte fällt er wieder zurück auf $+1$, also $y = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot x$.

Wenn wir beide Gleichungen noch mit 4 multiplizieren, um die lästigen Kommazahlen loszuwerden, bleibt uns das Gleichungssystem

$$4x = 2y + 1,$$
$$4y = 2 + 2x,$$

das schnell gelöst ist, beispielsweise indem wir $y = \frac{2+2x}{4} = \frac{1+x}{2}$ aus der zweiten Gleichung in die erste einsetzen, $4x = (1 + x) + 1$ erhalten und daraus $x = \mathbf{\frac{2}{3}}$ ausrechnen.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Eine weitere (im Kern mathematisch identische) Möglichkeit, auf eine Gleichung für x zu kommen, besteht darin, von $+1$ aus einen Spielbaum zu betrachten. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% landen wir bei ± 0 mit einer Gewinnchance von 50%. Im anderen Fall betrachten wir auch noch den übernächsten Zug. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% wird der Vorsprung zuerst $+2$ und fällt dann wieder auf $+1$ zurück, womit die Gewinnchance wieder x ist. Mit einer Wahrscheinlichkeit von den restlichen 25% gewinnt Anton zwei Punkte nacheinander und damit das Spiel. Somit erhalten wir

$$x = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot x + 0{,}25 \cdot 1.$$

(Im Prinzip ist das dasselbe wie zuvor, nur, dass wir die zweite Gleichung bereits durch eine Überlegung eingesetzt haben, ohne y jemals explizit zu betrachten.)

Als weitere Möglichkeit können wir von $+1$ aus *immer* die nächsten zwei Züge betrachten. In einem von vier Fällen holt Anton zwei Punkte und gewinnt. In zwei von vier Fällen ($+1 - 1$ oder $-1 + 1$) ist der Vorsprung nach zwei Würfen wieder $+1$. Und im letzten der vier Fälle wendet sich das Blatt, Anton verliert zwei Punkte und Bernd liegt nun in Führung. Wir haben also

$$x = 0{,}25 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot x + 0{,}25 \cdot (1 - x),$$

woraus x sich wieder direkt ausrechnen lässt. (Diese Variante ist mathematisch ein klein wenig anders, weil wir die Symmetrieüberlegung zwischen -1 und $+1$ statt jene bei Gleichstand genutzt haben.)

30. Wenn im linken Bild zwei Kinder richtig stehen und drei falsch, dann müssen letztere drei reihum getauscht haben, also irgendein x zur Mutter von y, y zur Mutter von z und z zur Mutter von x; wir können leicht überprüfen, dass es keine andere Möglichkeit gibt, wie genau drei falsch stehen können.

Um vom linken Bild zum rechten zu kommen, laufen zuerst einmal diese drei wieder nach Hause. Damit genau zwei falsch stehen, müssen nun zwei Kinder die Plätze tauschen.

Wir sehen, dass kein Kind im rechten Bild gleich steht wie im linken, daher müssen die beiden, die ihre Plätze getauscht haben, genau jene zwei sein, die im linken Bild richtig gestanden sind.

Wenn wir vergleichen, welches Kind zwischen linkem und rechtem Bild wohin gegangen ist, dann haben b und d die Plätze getauscht, also sind sie die beiden, die rechts falsch stehen und links richtig. (Wir sehen auch, dass a dorthin gegangen ist, wo zuvor c gestanden ist, c dorthin, wo e gestanden ist und e dorthin, wo a war, also sind sie die drei, die reihum getauscht haben.)

Im rechten Bild stehen daher alle richtig bis auf b und d, also steht dort a bei seiner Mutter **D**.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Man kann auch eine Fallunterscheidung machen. Kein Kind steht rechts bei der gleichen Mutter wie links, also steht jedes Kind mindestens ein Mal falsch. Wir wissen aber auch, dass links zwei und rechts drei Kinder richtig stehen, also sind von den insgesamt 10 abgebildeten Paaren (in beiden Bildern zusammen) auch fünf korrekt, folglich steht jedes Kind auch ein Mal richtig.

Also steht a entweder im linken Bild richtig bei B oder im rechten Bild richtig bei D.

Nehmen wir an, a steht im linken Bild richtig. Dann ist B die Mutter von a, also ist sie insbesondere nicht die Mutter von e, das im rechten Bild neben ihr steht.

Also steht e im linken Bild richtig bei E. Dann ist E nicht die Mutter von c im rechten Bild, also steht c links richtig bei D. Jetzt haben wir aber schon drei Kinder, die im linken Bild richtig stehen (nämlich a, e und c), was der Angabe widerspricht.

Folglich ist D die Mutter von a, und wir finden wie zuvor die Zuordnung A–d, B–e, C–b, D–a und E–c.

Anhang: Weitere Überlegungen zu Aufgabe 11

Aufgabe 11 bietet viele schöne Möglichkeiten für eine tiefere, über den Känguru-Wettbewerb deutlich hinausgehende Beschäftigung mit den Eigenschaften solcher Parabeln. Für Leute, die gerne noch ein bisschen weitertüfteln wollen, finden sich in diesem Anhang daher einige zusätzliche Gedanken rund um diese Aufgabe. Insbesondere wollen wir folgende Fragestellungen klären:

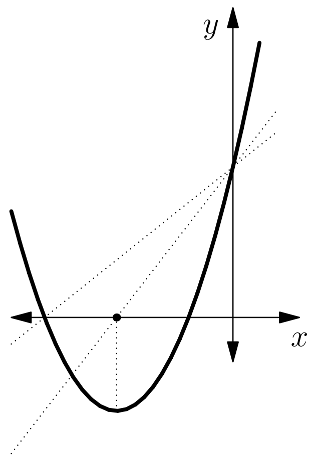
Lässt sich die Möglichkeit $y = bx + c$ auch durch graphische Überlegungen und Abschätzungen ausschließen?

Nehmen wir an, die dargestellte Gerade wäre $y = bx + c$.

Wenn eine Parabel zwei Nullstellen hat, muss $D = b^2 - 4ac > 0$ gelten, wobei D genau die Determinante aus der dritten Gleichung im obigen Gleichungssystem ist, also Schnitt von Parabel und x-Achse. Es gilt also $b > \frac{4ac}{b}$.

Die Symmetrieachse der Parabel liegt bei $x = \frac{-b}{2a}$, wie wir sehen, indem wir in derselben Gleichung die Determinante gleich 0 setzen.

Die Gerade $y = bx + c$ hat die Steigung b. Diese Steigung ist sicher kleiner als jene der Geraden, die den weiter rechts gelegenen Punkt $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$ (Schnittpunkt der Symmetrieachse der Parabel mit der x-Achse) mit $(c, 0)$ verbindet, siehe Abbildung.



Letztere Steigung beträgt

$$\frac{c}{\frac{b}{2a}} = \frac{2ac}{b}.$$

Da diese Steigung positiv ist, gilt klarerweise auch

$$\frac{2ac}{b} < \frac{4ac}{b}.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$b < \frac{2ac}{b} < \frac{4ac}{b} < b,$$

ein Widerspruch.

Man bestimme alle Tripel (a, b, c), für die die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ und die Gerade $y = ax + c$ einander wie abgebildet schneiden.

Setzen wir zufällige Werte für a, b und c ein, so stellen wir fest, dass der Schnittpunkt von Parabel und $y = ax + c$ nicht immer auf der x-Achse liegt. Den Schnittpunkt von $y = ax + c$ mit der x-Achse erhalten wir, indem wir $y = 0$ setzen und $x = -\frac{c}{a}$ erhalten. Berechnen wir die Schnittpunkte von Parabel und Gerade, also die Lösungen von $ax^2 + bx + c = ax + c$, so erhalten wir $x = 0$ (den wir schon kennen) und $x = 1 - \frac{b}{a}$. Zuletzt erhalten wir wir die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse als $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, wobei $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ der linke davon ist.

Im Gleichungssystem

Schnittpunkt von Gerade und x-Achse:	$\overline{x} = -\frac{c}{a}$
Linker Schnittpunkt von Parabel und Gerade:	$\overline{x} = 1 - \frac{b}{a}$
Linker Schnittpunkt von Parabel und x-Achse:	$\overline{x} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

mit drei Gleichungen und vier Unbekannten (wobei $\overline{x}$ die x-Koordinate des gemeinsamen Schnittpunktes mit der x-Achse ist) folgt aus dem Gleichsetzen der ersten beiden Gleichungen, dass Gerade und Parabel sich immer dann auf der x-Achse schneiden, wenn $b = a + c$ gilt. Setzt man dies in die dritte Gleichung ein und vereinfacht weiter, so ergibt sich, dass dies nur für $a \geq c$ der linke der beiden Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse ist, andernfalls der rechte. Weiters sehen wir noch, dass $c > 0$ ist (weil der Schnittpunkt mit der y-Achse oberhalb der x-Achse liegt), $a > 0$ (weil die Parabel nach oben geöffnet ist), und folglich auch $b > 0$ (weil die Parabel sonst vollständig oberhalb der x-Achse liegen würde und auch $b = a + c$ nicht erfüllt wäre).

Somit erhalten wir ein solches Bild immer dann (und nur dann), wenn wir zwei beliebige positive reelle Zahlen s und t mit $s < t$ wählen und $a = s$, $b = s + t$ und $c = t$ setzen (mit Schnittpunkt bei $\overline{x} = -\frac{t}{s}$), also beispielsweise $y = 4x^2 + 21x + 17$ für die Parabel und $y = 4x + 17$ für die Gerade.

(Dasselbe Ergebnis erhalten wir auch, wenn wir das Steigungsdreieck der Geraden betrachten, das einerseits durch die Punkte $(0, c)$ und $(x_2, 0)$ mit $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ gegeben ist, andererseits gemäß der Geradengleichung gleich a sein muss, also $a = \frac{c}{x_2}$. Mathematisch ist das äquivalent dazu, im obigen Gleichungssystem sofort erste und dritte Gleichung gleichzusetzen.)

Wenn in der Angabe nicht gefordert wäre, dass a, b und c paarweise verschieden sein müssen, könnte es dann Werte (a, b, c) geben, für die eine der vier anderen Möglichkeiten $y = ax + b$, $y = cx + b$, $y = bx + a$ oder $y = cx + a$ die Parabel wie abgebildet schneidet?

Damit Gerade und Parabel sich auf der y-Achse schneiden, müssen ihre konstanten Terme übereinstimmen. Für die ersten zwei dieser vier Möglichkeiten müsste daher $b = c$ gelten, die Parabelgleichung wäre also $y = ax^2 + bx + b$.

- Für die Gerade $y = cx + b = bx + b$ ergibt sich wie zuvor, dass sie eine Tangente an die Parabel im Punkt $(0, b)$ ist.
- Für die Gerade $y = ax + b$ betrachten wir, dass es auf Grund des linken Schnittpunktes von Gerade und Parabel auf der y-Achse ein $\overline{x}$ geben muss, für das $0 = a\overline{x}^2 + b\overline{x} + b$ und $0 = a\overline{x} + b$ gleichzeitig erfüllt sind, was durch Vereinfachen und Einsetzen aber zu $0 = a\overline{x}^2 + b\overline{x} + b = \overline{x} \cdot (a\overline{x} + b) + b = x \cdot 0 + b$, somit zu $b = 0$ und der offensichtlich nicht zum Bild passenden Parabel $y = ax^2$ führt.

Für die dritte und vierte Möglichkeit müsste $a = c$ gelten, die Parabelgleichung wäre $y = ax^2 + bx + a$.

- Für die Gerade $y = bx + a$ ergibt sich wie zuvor, dass sie eine Tangente an die Parabel im Punkt $(0, a)$ ist.
- Für die Gerade $y = cx + a = ax + a$ ergibt sich, dass ihr Schnittpunkt mit der y-Achse bei $x = -1$ liegt. Eingesetzt in die Parabelgleichung folgt aber $0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + a = 2a - b$, also $b = 2a$. Damit wird die Parabelgleichung zu $x = ax^2 + 2ax + a = a \cdot (x + 1)^2$ und sie berührt die x-Achse daher in $x = -1$, statt sie in zwei Stellen zu schneiden.

Daher könnte man diese vier Möglichkeiten (von denen nur drei als Antwortmöglichkeiten auftreten) also sogar dann ausschließen, wenn nicht gegeben wäre, dass a, b und c paarweise verschieden sind. Diese Zusatzinformation macht die Aufgabe also etwas leichter, ist aber eigentlich gar nicht nötig.