Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

– Lösungsvektor –

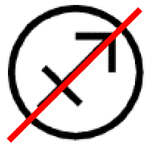
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	E	D	B	A	A	B	D	B	E	D	E	C	B	D	B	E	C	E	D	C	C	D	B	C	C	B	C	D	A

– 3 Punkte Beispiele –

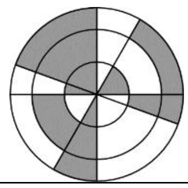
1. Welches der folgenden Symbole für Sternzeichen hat eine Symmetrieachse?

(A)  Schütze (B)  Skorpion (C)  Löwe (D)  Wassermann (E)  Widder

Symbol **A (Schütze)** hat eine Spiegelachse entlang des Schafts des Pfeils (rote Linie).

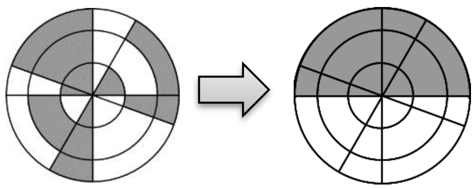


2. Die abgebildete Figur besteht aus 3 Kreisen mit gemeinsamem Mittelpunkt. Diese werden von 4 Durchmessern dieser Kreise geschnitten.
Wie viel Prozent der Gesamtfläche der Figur sind grau gefärbt?



(A) 30 % (B) 35 % (C) 40 % (D) 45 % (E) 50 %

Für jede grau gefärbte Fläche gibt es ein weißes Gegenstück. Es gibt also gleich viele graue wie weiße Flächen, sprich **50 %** ist grau gefärbt.



3. Welches Ergebnis liefert die folgende Rechnung: $\frac{20\cdot 21}{2+0+2+1}$?

(A) 42 (B) 64 (C) 80 (D) 84 (E) 105

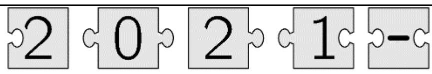
Der Nenner beträgt 2+0+2+1 = 5. Nun kann man kürzen: 20/5 = 4. Es bleibt 4 · 21 = **84**

4. Wie viele vierstellige Zahlen haben folgende Eigenschaft: Die Ziffern sind aufeinanderfolgend und von links nach rechts aufsteigend.

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

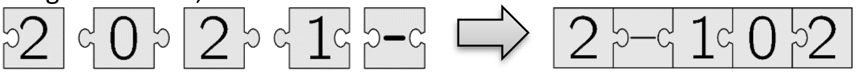
Es gibt 10 Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9. Eine mehrstellige Zahl kann nicht mit 0 beginnen, bleiben also die Ziffern 1 bis 9 als Anfangsziffern. 6 ist die höchste Anfangsziffer, bei der noch 3 weitere Ziffern für eine vierstellige Zahl übrigbleiben. Die Anfangsziffern können also nur von 1 bis 6 sein und die **6** Zahlen lauten: 1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789.

5. Wenn man das Puzzle richtig zusammensetzt, erhält man ein Rechteck, auf dem eine Rechnung steht. Wie lautet das Ergebnis dieser Rechnung?

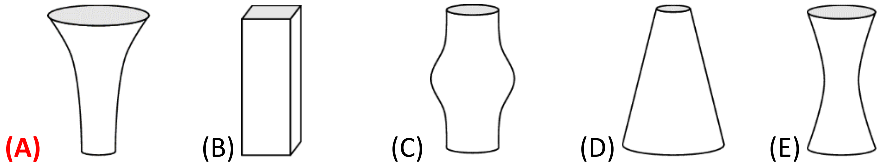


(A) –100 (B) –8 (C) –1 (D) 199 (E) 208

Setzt man das Puzzle richtig zusammen, erhält man 2 – 102 = –100



6. Die folgenden fünf Vasen haben dieselbe Höhe und fassen jeweils einen Liter. In jede Vase wird ein halber Liter Wasser gefüllt. In welcher Vase steht das Wasser am höchsten?



Die Vasen werden mit einem halben Liter gefüllt. Vasen B, C und E sind symmetrisch, deshalb muss in diesen Vasen das Wasser bis zur Hälfte stehen. Die Entscheidung fällt zwischen A und D. Da Vase A einen schmäleren, langen Hals hat, wird das Wasser über die Hälfte steigen. Vase D ist unten größer, das Wasser bleibt unter der Hälfte. In **Vase A** steht das Wasser also am höchsten.

7. Lukas addierte die beiden zweistelligen Zahlen und erhielt die korrekte Lösung 137. Welches Ergebnis wird Lukas bei der Addition der beiden vierstelligen Zahlen erhalten?

$$\begin{array}{r} AB \\ +\,CD \\ \hline 137 \end{array} \qquad \begin{array}{r} ABAB \\ +\,CDCD \\ \hline ? \end{array}$$

(A) 13 737 **(B)** 13 837 (C) 14 747 (D) 23 737 (E) 137 137

Wir können das Beispiel lösen, ohne Ziffern für die Buchstaben einzusetzen. Aufgrund der linken Addition wissen wir, dass AB+CD = 137. Für die Addition der Einer- und Zehnerstellen der vierstelligen Zahl erhält man also 137, die 1 ist weiterzuschreiben für die Hunderterstelle (in Grafik angedeutet). Auch für die Hunderter- und Tausenderstelle der vierstelligen Addition ergibt sich 137 und mit der weitergezählten 1, 137 + 1 = 138. Das Ergebnis ist also **13837**.

$$\begin{array}{r} AB\,AB \\ +\,CD\,CD \\ \hline ? \end{array} \qquad \begin{array}{r} 137 \\ +\,137 \\ \hline 13837 \end{array}$$

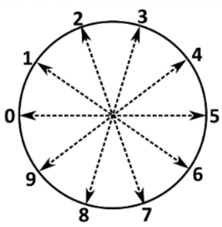
8. 24 Kinder spielen Räuber und Polizist. Es gibt 5-mal so viele Räuber wie Polizisten. Wie viele Polizisten gibt es?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 **(D)** 4 (E) 5

Die Anzahl der Räuber (R) und die Anzahl der Polizisten (P) ergibt zusammen 24 Kinder: R+P = 24. Es gibt 5-mal so viele Räuber wie Polizisten: 5 · P = R. Es folgt: 5 · P+P = 6 · P = 24. Daher gibt es also **4** Polizisten.

9. Ein Fahrradschloss besteht aus vier Rädern, die mit den Ziffern von 0 bis 9 beschriftet sind. Derzeit ist das Fahrrad abgesperrt, und der rechts abgebildete Code ist zu sehen. Wenn man jedes der Räder um 180° dreht, lässt sich das Schloss öffnen.
Mit welcher Zahlenkombination lässt sich das Schloss öffnen?

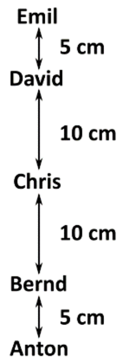
Die 10 Ziffern 0 bis 9 sind gleichmäßig auf einem Ring angeordnet (siehe Abbildung). Den richtigen Code kann man sich mit Hilfe dieser Grafik leicht überlegen, indem man schaut welche Zahlen gegenüberliegen, 1 gegenüber von 6, 8 gegenüber von 3, 9 gegenüber von 4 und 3 gegenüber von 8. Der richtige Code ist **1893**.
Weitere Überlegung: Eine 180° Drehung entspricht der Hälfte einer ganzen Kreisdrehung, die Ziffern werden zu den Ziffern auf der anderen Seite der eingezeichneten Pfeile. Eine halbe Kreisdrehung entspricht bei 10 Ziffern also einer Verschiebung des Schlosses um 5 Ziffern.
6 – 5 = 1; 3 + 5 = 8; 4 + 5 = 9; 8 – 5 = 3. Der richtige Code ist **1893**.



10. Bernd ist 5 cm größer als Anton, aber 10 cm kleiner als Chris. David ist 10 cm größer als Chris, aber 5 cm kleiner als Emil. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(A) Anton und Emil sind gleich groß.
(B) Anton ist 10 cm größer als Emil.
(C) Anton ist 10 cm kleiner als Emil.
(D) Anton ist 30 cm größer als Emil.
(E) Anton ist 30 cm kleiner als Emil.

Bernd ist größer als Anton: A<B. Bernd ist kleiner als Chris: A<B<C. David ist größer als Chris: A<B<C<D, David ist kleiner als Emil: A<B<C<D<E. Die gesamte Größendifferenz beträgt 5 + 10 + 10 + 5 = 30. Anton muss also **30 cm kleiner** sein als Emil.

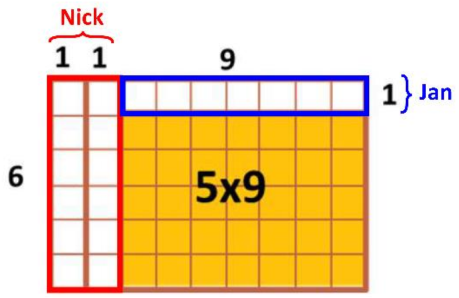


– 4 Punkte Beispiele –

11. Eine rechteckige Schokoladentafel besteht aus gleich großen quadratischen Stückchen. Nick bricht zwei ganze Reihen ab und isst alle 12 quadratischen Stückchen, die er erhält. Jan bricht vom Rest eine ganze Reihe ab und isst die 9 Stückchen, die er erhält. Wie viele quadratische Stückchen bleiben noch übrig?

(A) 72 (B) 63 (C) 54 (D) 45 (E) 36

Die Grafik verdeutlicht die einzelnen Schritte: Da Nick 12 Stückchen erhält, wenn er 2 ganze Reihen abbricht, muss eine dieser Reihen 6 Stückchen lang sein (rot). Jan bricht vom Rest der Tafel eine ganze Reihe ab, die allerdings 9 Stückchen lang ist (also länger als eine Reihe von Nick, blau). Jan kann also nicht von der gleichen Seite abgebrochen haben wie Nick, sondern hat von der zweiten Seite der Tafel abgebrochen. Die verbliebene Tafel muss so lang sein wie Jans Reihe, und um eine Reihe weniger breit als Nicks Reihe: 9 Stückchen · 5 Stückchen = **45**.

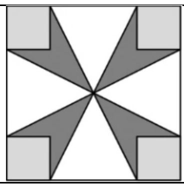


12. Ein Gefäß wiegt 560 g, wenn es zu einem Fünftel mit Wasser gefüllt ist. Dasselbe Gefäß wiegt 740 g, wenn es zu vier Fünftel mit Wasser gefüllt ist. Wie viel wiegt das leere Gefäß?

(A) 60 g (B) 112 g (C) 180 g (D) 300 g (E) 500 g

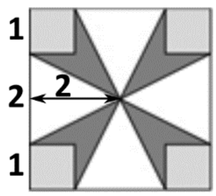
Der Unterschied zwischen dem ersten Füllstand und dem zweiten Füllstand beträgt 4/5 − 1/5 = 3/5. Eine 3/5 Füllung Wasser muss also 740 − 560 = 180 g wiegen. Eine 1/5 Füllung Wasser muss daher 180/3 = 60 g wiegen. Das leere Gefäß wiegt also 560 − 60 = **500 g**.

13. Der Flächeninhalt des großen Quadrats beträgt 16 cm². Die Fläche der vier kleinen hellgrauen Quadrate ist jeweils 1 cm². Welchen Flächeninhalt hat die dunkelgraue Blume?



(A) 3 cm² (B) $\frac{7}{2}$ cm² (C) 4 cm² (D) $\frac{11}{2}$ cm² (E) 6 cm²

Da der Flächeninhalt des großen Quadrats 16 cm² beträgt, muss eine Seite des große Quadrats 4 cm lang sein. Da der Flächeninhalt der kleinen Quadrate jeweils 1 cm² beträgt, haben sie eine Seitenlänge von 1 cm. Die Basis eines weißen Dreiecks ist daher 4 – 1 − 1 = 2 cm lang. Da die Figur symmetrisch ist, ist die Höhe eines dieser Dreiecke ebenfalls 4/2 = 2 cm. Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt dann $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ cm². Die dunkelgraue Blume muss also einen Flächeninhalt von 16 – 4 · 1 – 4 · 2 = **4 cm²** haben.

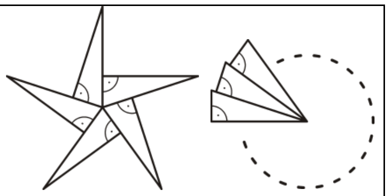


14. Costa stellt in seinem Garten eine Bretterwand auf. Er verwendet dafür 9 Bretter, die jeweils 40 cm breit sind. Je zwei benachbarte Bretter überlappen sich gleich weit (siehe Abbildung). Die Bretterwand ist insgesamt 3,4 m breit. Um wie viel cm überlappen sich je zwei benachbarte Bretter?

(A) 2,4 cm (B) 2,5 cm (C) 3 cm (D) 4,8 cm (E) 5 cm

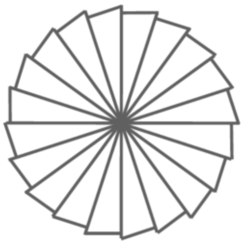
Stellt man alle 9 Bretter nebeneinander, würde man eine Gesamtbreite von $9 \cdot 40 = 360$ cm erhalten. Costa hat nur eine Breite von 340 cm erhalten. Die Überlappungen machen also $360 - 340 = 20$ cm aus. 9 Bretter nebeneinander können sich 8-mal überlappen. Eine Überlappung muss also $20/8 =$ **2,5 cm** lang sein.

15. Aus identischen rechtwinkligen Dreiecken werden Sterne gebastelt. Die Dreiecke liegen immer lückenlos und nicht überlappend aneinander. Legt man fünf dieser Dreiecke an ihren größeren spitzen Winkeln zusammen, erhält man den rechts abgebildeten Stern. Legt man die Dreiecke an ihren kleineren spitzen Winkeln zusammen, erhält man einen zweiten Stern – in der Abbildung siehst du so einen begonnenen Stern. Wie viele Dreiecke benötigt man für den gesamten zweiten Stern?



(A) 10 (B) 12 (C) 18 (D) 20 (E) 24

Im 5-eckigen Stern ergeben die 5 großen spitzen Winkel einen vollen Kreis. Ein voller Kreis entspricht einem Winkel von 360°. Ein großer spitzer Winkel muss also $360/5 = 72°$ haben. Für den kleineren spitzen Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks gilt dann, dass er $90 - 72 = 18°$ beträgt. Legt man die Dreiecke an ihren kleineren spitzen Winkeln zusammen, benötigt man daher insgesamt **20 Dreiecke** ($20 \cdot 18 = 360°$) um einen vollen Stern zu legen.

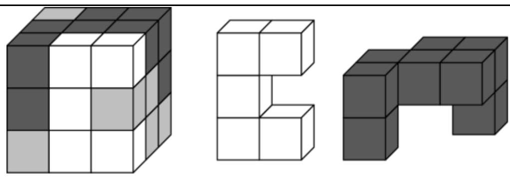


16. Bei einem Quiz gibt es 10 Fragen. Für eine richtige Antwort bekommt man 8 Punkte dazu. Für eine falsche Antwort werden 4 Punkte abgezogen. Fragen, die nicht beantwortet werden, werden mit 0 Punkten bewertet. Eric nimmt an diesem Quiz teil und erreicht 60 Punkte. Wie viele Fragen hat er nicht beantwortet?

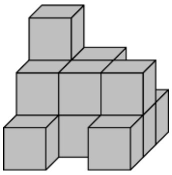
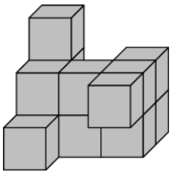
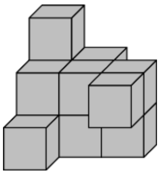
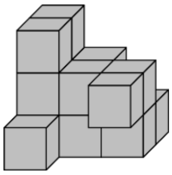
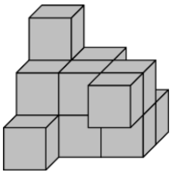
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Da Eric 60 Punkte erreicht hat, muss er mindestens 8 Fragen richtig beantwortet haben ($7 \cdot 8 = 56$ Punkte und damit auf jeden Fall zu wenig). Er kann nicht alle Fragen richtig beantwortet haben ($10 \cdot 8 = 80$ Punkte). Eric hat also entweder 8 oder 9 Fragen beantwortet. Da 60 nicht durch 8 teilbar ist, muss er auch mindestens 1 falsche Antwort gegeben und Punkteabzug kassiert haben. Man kommt zu dem eindeutigen Ergebnis $8 \cdot 8 – 4 = 60$ Punkte. Eric hat also 8 Fragen richtig, 1 Frage falsch und **1 Frage nicht beantwortet**.

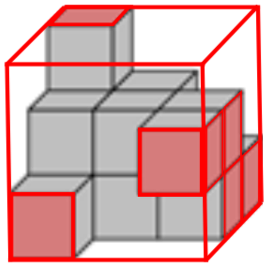
17. Aus kleinen 1×1×1-Würfeln werden drei Bausteine (weiß, schwarz, grau) gebildet. Sie lassen sich zum abgebildeten 3×3×3-Würfel zusammensetzen. Der weiße und der schwarze Baustein sind rechts davon abgebildet.



Welcher der fünf Bausteine ist der passende graue Teil?

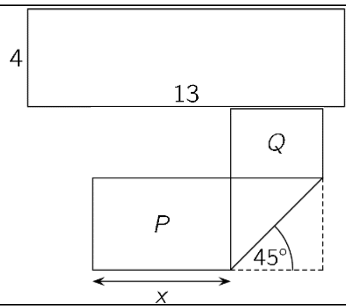
(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Wir suchen einen Teil, der an der vorderen Seite 2 kleine Außenflächen hat, an der oberen Seite 1 kleine Außenfläche hat und an der rechten Seite 4 kleine Außenflächen hat. Das passt nur zu **Teil E**.

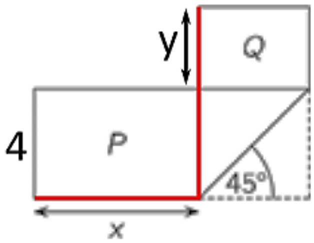


18. Markus faltet ein rechteckiges Blatt Papier, das 13 cm lang und 4 cm breit ist (siehe Abbildung). Es entstehen zwei kleine Rechtecke, P und Q, wobei der Flächeninhalt des Rechtecks P doppelt so groß wie jener von Q ist. Wie lang ist die Strecke x?

(A) 5 cm (B) 5,5 cm **(C)** 6 cm (D) 6,5 cm (E) $4\sqrt{2}$ cm



Das Rechteck P hat zwei Seiten: die Seite x ist unbekannt, die zweite Seite ist 4 cm lang. Der Flächeninhalt von P berechnet sich also mit 4 · x. Für das Rechteck Q gilt: eine Seite ist ebenfalls 4 cm lang, die zweite Seite ist unbekannt, y. Der Flächeninhalt von Q berechnet sich dann mit 4 · y. Wir wissen weiters, dass der Flächeninhalt von P doppelt so groß ist wie jener von Q, also 4 · x = 2 · 4 · y. Somit muss die Seite x doppelt so lang sein wie die Seite y, oder x = y/2. Die 13 cm lange Seite des ursprünglichen Rechtecks (rot in Skizze) setzt sich nun zusammen aus
x + 4 + (x/2) = 13. Es folgt x = **6 cm** lang.



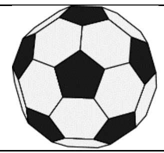
19. In einer Schüssel befinden sich doppelt so viele Äpfel wie Birnen. Christy und Lily teilen sich das Obst so, dass Christy doppelt so viele Früchte wie Lily erhält. Eine dieser Aussagen ist immer richtig. Welche?

(A) Christy bekommt zumindest eine Birne.
(B) Christy bekommt doppelt so viele Äpfel wie Birnen.
(C) Christy bekommt doppelt so viele Äpfel wie Lily.
(D) Christy bekommt so viele Äpfel wie Lily Birnen.
(E) Christy bekommt genauso viele Birnen wie Lily Äpfel.

Beginnen wir mit einem speziellen Fall. Nehmen wir an, Christy bekommt alle Äpfel aber keine Birnen, und Lily alle Birnen aber keine Äpfel. Bei diesem Fall trifft nur **Aussage E** zu, weil Christy 0 Birnen hat und Lily 0 Äpfel hat.
Gilt diese Aussage allgemein? Nehmen wir an, Christy ersetzt eine gewisse Anzahl ihrer Äpfel durch die gleiche Anzahl an Birnen von Lily. Dann gilt doch, dass Lily die gleiche Anzahl an Äpfeln besitzt, wie Christy Birnen. Die größtmögliche Anzahl an Äpfel, die Christy durch Birnen ersetzen kann, ist die Hälfte aller Äpfel, denn es gibt halb so viele Birnen wie Äpfel. **In jedem Fall bekommt Lily die gleiche Anzahl an Äpfeln wie Christy Birnen.**

20. Ein Fußball besteht aus weißen Sechsecken und schwarzen Fünfecken (siehe Abbildung). Der Fußball hat 12 Fünfecke. Wie viele Sechsecke hat er?

(A) 12 (B) 15 (C) 18 **(D)** 20 (E) 24



1. Lösungsweg: Der Fußball besteht aus 12 Fünfecken. Auf der Skizze sieht man 6 Fünfecke, also eine Hälfte des Fußballs. Auf dieser Hälfte sieht man auch 10 Sechsecke. Der ganze Fußball hat also doppelt so viele Sechsecke, nämlich **20**.

2. Lösungsweg: Alle Fünfecke haben zusammen 12 · 5 = 60 Kanten. 1 Sechseck teilt sich Kanten mit 3 Fünfecken. Es gibt also 60/3 = **20** Sechsecke.

Hinweis: Bei einem Fußball handelt es sich um ein "abgestumpftes Ikosaeder" (griechisch: *eíkosi* = zwanzig; ein Ikosaeder ist ein geometrischer Körper, der aus **20 gleichseitigen Dreiecken** besteht **und 12 Ecken besitzt**). Die Fünfecke entstehen durch das "Abstumpfen" = Abschneiden der 12 Ecken, und aus den 20 Dreiecken entstehen dadurch 20 Sechsecke.

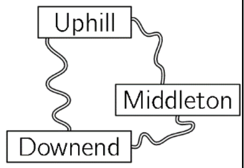
– 5 Punkte Beispiele –

21. In einem bestimmten Bruch mit positivem Zähler und positivem Nenner wird der Zähler um 40 % vergrößert. Um wieviel Prozent muss der Nenner verkleinert werden damit der neue Bruch doppelt so groß wie der ursprüngliche Bruch wird?

(A) 10 % (B) 20 % **(C)** 30 % (D) 40 % (E) 50 %

Der ursprüngliche Bruch sei $\frac{z}{n}$. Nun wird der Zähler, z, um 40 % vergrößert also mit 1,4 multipliziert und der Nenner, n, gleichzeitig mit einem unbekannten Faktor x multipliziert, sodass gilt: $\frac{z\cdot 1{,}4}{n\cdot x}=\frac{z}{n}\cdot\frac{1{,}4}{x}=\frac{z}{n}\cdot 2$. Es muss also $\frac{1{,}4}{x}=2$ sein und daher x = 0,7. Der neue Nenner ist also 70 % des alten Nenners n, bzw. n wurde um **30 %** verkleinert.

22. Drei Dörfer sind mit Straßen verbunden (siehe Abbildung). Fährt man von Downend nach Uphill mit dem Umweg über Middleton, so fährt man um 1 km weiter als auf der direkten Verbindung. Fährt man von Downend nach Middleton mit dem Umweg über Uphill, so fährt man um 5 km weiter als auf der direkten Verbindung. Fährt man von Uphill nach Middleton mit dem Umweg über Downend, so fährt man um 7 km weiter als auf der direkten Verbindung. Welche Länge besitzt die kürzeste der drei direkten Verbindungen?



(A) 1 km (B) 2 km **(C)** 3 km (D) 4 km (E) 5 km

Bezeichnen wir den Weg von Uphill nach Downend mit x, den Weg von Downend nach Middleton mit y und den Weg von Middleton nach Uphill mit z. Mit Hilfe der Angabe können wir drei Gleichungen aufstellen:

$$x + 1 = y + z \qquad \text{(I)}$$
$$y + 5 = x + z \qquad \text{(II)}$$
$$z + 7 = x + y \qquad \text{(III)}$$

Lösungsweg 1

Löst man dieses Gleichungssystem, erhält man die Streckenlängen. Ein möglicher Beginn ist, alle 3 Gleichungen zu addieren. Man erhält die Gleichung x + y + z = 13, in die wir einsetzen können.
Wir wissen: y + z = x + 1. Durch Einsetzen: x + x + 1 = 13. Die Strecke von Uphill nach Downend ist 6 km.
Wir wissen: x + z = y + 5. Durch Einsetzen: y + y + 5 = 13. Die Strecke von Downend nach Middleton ist 4 km.
Wir wissen: x + y = z + 7. Durch Einsetzen: z + z + 7 = 13. Die Strecke von Middleton nach Uphill ist **3 km**. Das ist die kürzeste Strecke.

Lösungsweg 2

Durch Umformen von (I) erhält man y + z – x = 1 oder (y – x) + z = 1 (A).

Aus (II) erhält man x + z – y = 5 oder (x – y) + z = 5 (B).

Aus den beiden Gleichungen sieht man, das (x – y) und (y – x) Gegenzahlen sind nämlich (+2) und (–2), weil 5 – 1 = 4 ist. (x – y) muss dabei +2 sein. Die neue Gleichung (B) lautet: 2 + z = 5 und daher z = 3 km.

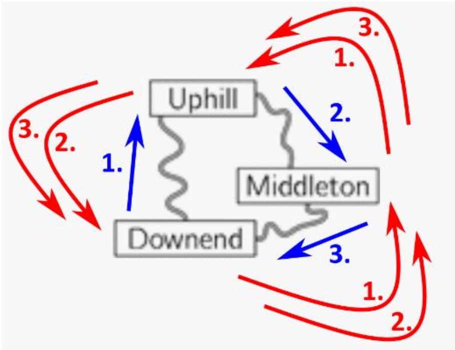
Auf die gleiche Art erhält man aus (I) (z – x) + y = 1 und aus (III) (x – z) + y = 7 und kann schließen, dass (x – z) den Wert +3 haben muss. Die Gleichung 3 + y = 7 liefert y = 4 km.

Aus (II) und (III) erhält auf die gleiche Art (z – y) + x = 5 und (y – z) + x = 7 mit (+1) als Wert für (y – z). Aus der Gleichung 1 + x = 7 erhält man für x den Wert 6 km.

Die kürzeste der drei direkten Verbindungen ist also z mit **3 km.**

Lösungsweg 3 – ohne Gleichungssystem

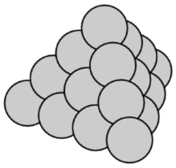
Nehmen wir an, eine Person möchte von Downend im Kreis nach Downend fahren. Das kann sie auf dem direkten Weg machen, oder indem sie stattdessen immer die entsprechenden Umwege fährt. In der Skizze sind alle direkten Wege rot, und alle Umwege für diese Wege blau gekennzeichnet.:

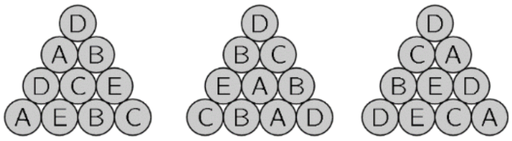


1. die Person startet in Downend und fährt über Middleton nach Uphill (das ist der Umweg, statt direkt von Downend nach Uphill zu fahren)
2. die Person ist jetzt in Uphill und fährt über Downend nach Middleton (das ist der Umweg, statt direkt von Uphill nach Middleton zu fahren)
3. die Person ist jetzt in Middleton und fährt über Uphill zurück nach Downend (das ist der Umweg, statt direkt von Middleton zurück nach Downend zu fahren)

Fährt man alle Umwege für die Strecke (Downend-Uphill-Middleton-Downend) ist man also nicht 1 Mal im Kreis gefahren, sondern sogar 2 Mal, wie die roten Pfeile zeigen und hat dabei einen gesamten Umweg von 1+5+7 = 13 km gemacht. Es gilt also 2 Kreise = 1 Kreis + 13 km. Das heißt, 1 Kreis von Downend-Uphill-Middleton-Downend muss 13 km lang sein. Die Strecke von Downend nach Uphill ist 1 km kürzer als der Umweg. Die 13 km teilen sich also in 6 km für die Strecke Downend-Uphill und 7 km für die Strecke Downend-Middleton-Uphill. Die Strecke Uphill-Middleton ist 7 km kürzer als der Umweg. Die 13 km teilen sich also in 3 km für die Strecke Uphill-Middleton und 10 km für die Strecke Uphill-Downend-Middleton. Die Strecke Middleton-Downend muss also 13-6-3 = 4 km lang sein. Die kürzeste der drei Verbindungen ist **3 km** lang.

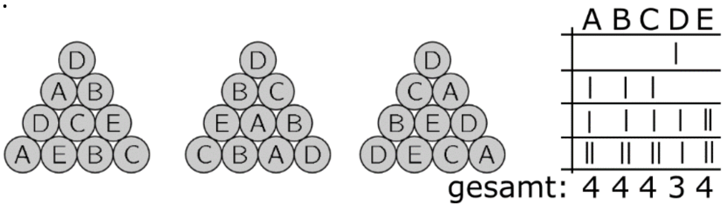
23. Mit 20 gleich großen Kugeln wird eine dreiseitige Pyramide gebaut. (siehe Abbildung). Auf jede der kleinen Kugeln wird genau einer der Buchstaben A, B, C, D oder E geschrieben. Jeder Buchstabe wird genau viermal verwendet. Drei der vier Flächen der Pyramide sind abgebildet. Welcher Buchstabe steht auf der Kugel in der Mitte der nicht abgebildeten Fläche?



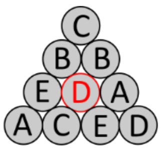


(A) A (B) B (C) C **(D)** D (E) E

Die Pyramide besteht aus 20 Kugeln. Von oben nach unten gibt es: 1 oberste Kugel, 3 Kugeln in der nächsten Ebene, 6 Kugeln in der dritten Ebene und 10 Kugeln in der untersten Ebene. Die Kugeln an den Kanten der Pyramide gehören zu jeweils 2 Seitenflächen, diese Buchstaben kommen in jeder Ebene also doppelt vor. Folgende Buchstaben sind pro Ebene zu sehen:



Die einzige Kugel, die man nicht sieht, ist also die vierte Kugel des **Buchstaben D**. Die vierte Seitenfläche schaut wie folgt aus:



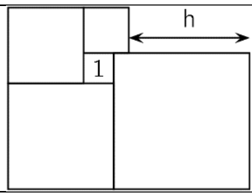
24. Die 6-ziffrige Zahl 1ABCDE wird mit 3 multipliziert und ergibt die 6-ziffrige Zahl ABCDE1.
Wie groß ist die Ziffernsumme des Ergebnisses?
(A) 24 (B) 27 (C) 30 (D) 33 (E) 36

Die Multiplikation lautet: 1ABCDE · 3 = ABCDE1. Jeder Buchstabe steht für eine andere Ziffer.
E · 3 muss also eine Zahl mit der Einer – Stelle 1 ergeben, dies gilt nur für E = 7 bzw. 7 · 3 = 21 (2 anschreiben für die Zehner-Stelle).
D · 3 muss nun eine Zahl ergeben, die auf E − 2 = 7 − 2 = 5 endet, dies gilt für D = 5 bzw. 5 · 3 = 15 (1 anschreiben für die Hunderter-Stelle).
C · 3 muss nun eine Zahl ergeben, die auf D − 1 = 5 − 1 = 4 endet, dies gilt für C = 8 bzw. 8 · 3 = 24 (2 anschreiben für die Tausender-Stelle).
B · 3 muss nun eine Zahl ergeben, die auf C − 2 = 8 − 2 = 6 endet, dies gilt für B=2 bzw. 2 · 3 = 6.
A · 3 muss nun eine Zahl ergeben, die auf B = 2 endet, dies gilt für A = 4 bzw. 4 · 3 = 12.
Die korrekte Rechnung lautet also 142857 · 3 = 428571, und die Ziffernsumme der Zahl ist 4 + 2 + 8 + 5 + 7 + 1 = **27**.

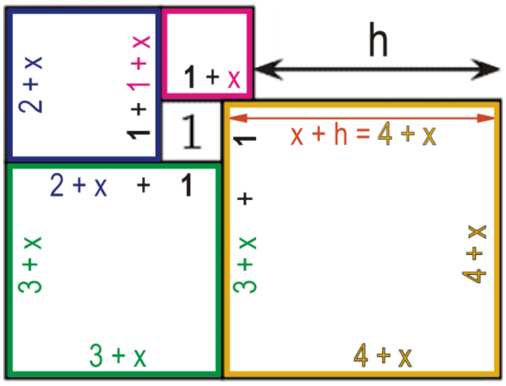
25. An einem Mathematik-Bewerb haben weniger als 30 Schüler teilgenommen. 4 Beispiele waren zu lösen. $\frac{1}{3}$ der Teilnehmer konnte genau 1 Beispiel nicht lösen. $\frac{1}{4}$ der Teilnehmer konnte genau 2 Beispiele nicht lösen. $\frac{1}{6}$ der Teilnehmer konnte genau 3 Beispiele nicht lösen. $\frac{1}{8}$ der Teilnehmer konnte kein Beispiel lösen.
Wie viele Teilnehmer konnten alle Beispiele lösen?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Wir kennen nicht die Gesamtanzahl aller Schüler, nur dass sie kleiner als 30 gewesen ist. Wir wissen aber, dass $\frac{1}{3}$ der Schüler genau 1 Beispiel gelöst haben, $\frac{1}{4}$ der Schüler genau 2 Beispiele, $\frac{1}{6}$ der Schüler genau 3 Beispiele und $\frac{1}{8}$ der Schüler gar kein Beispiel. Da es keine halben Schüler gibt, suchen wir also eine Teilnehmerzahl, die durch 3, 4, 6 und 8 teilbar und kleiner als 30 ist. Das gilt nur für die Zahl 24. Das heißt, 8 Schüler haben 1 Beispiel gelöst, 6 Schüler 2 Beispiele, 4 Schüler 3 Beispiele und 3 Schüler gar kein Beispiel. 8 + 6 + 4 + 3 = 21 Schüler.
24 − 21= **3 Schüler** haben also alle Beispiele gelöst.

26. Fünf verschieden große Quadrate werden, so wie in der Abbildung zu sehen, angeordnet.
Der Flächeninhalt des kleinsten Quadrats beträgt 1 cm².
Welche Länge besitzt h?
(A) 3 cm (B) 3,5 cm (C) 4 cm (D) 4,2 cm (E) 4,5 cm



Da der Flächeninhalt des kleinsten Quadrats 1 cm² ist, ist seine Seite 1 cm lang. Die Seitenlänge des nächst größeren Quadrats oberhalb kann man nun als 1 + x bezeichnen. Die Seitenlänge des Quadrats links davon, setzt sich nun aus 1 + 1 + x = 2 + x zusammen. Die Seitenlänge des Quadrats unterhalb folglich aus 2 + x + 1 = 3 + x und die Seitenlänge des rechten Quadrats entspricht 3 + x + 1 = 4 + x.
4 + x entspricht gleichzeitig h+x, h muss also **4 cm** lang sein.



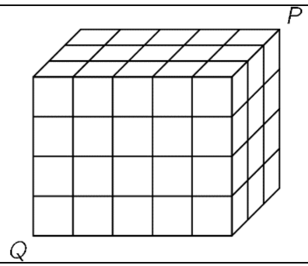
27. 2021 Kängurus werden der Reihe nach aufgestellt und von 1 bis 2021 nummeriert. Jedes Känguru ist entweder rot, grau oder blau gefärbt. Bei drei beliebig aufeinanderfolgenden Kängurus kommen immer alle drei Farben vor. Bruce tippt auf die Farben einiger Kängurus und sagt: „Känguru 2 ist grau, Känguru 20 ist blau, Känguru 202 ist rot, Känguru 1002 ist blau und das letzte Känguru mit der Nummer 2021 ist grau." Bruce hat sich nur einmal geirrt. Bei welcher Nummer hat er sich geirrt?

(A) 2 **(B)** 20 (C) 202 (D) 1002 (E) 2021

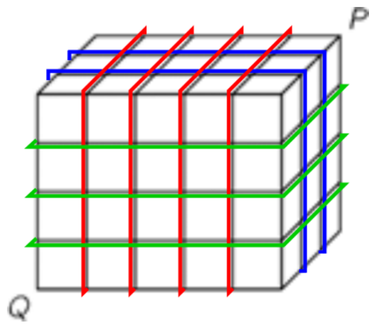
Wenn bei drei beliebig aufeinanderfolgenden Kängurus alle 3 Farben vertreten sein sollen, ist das nur möglich, wenn es eine festgelegte, sich wiederholende Reihenfolge der Farben gibt. Känguru 1 muss also die Farbe von Känguru 4, 7, 10 usw. haben. Känguru 2 muss die Farbe von Känguru 5, 8, 11 usw. haben. Känguru 3 muss die Farbe von Känguru 6, 9, 12 usw. haben. Man kann die Kängurus also in 3 Zahlengruppen aufteilen. Kängurus mit den Zahlen, die durch 3 teilbar sind, müssen die gleiche Farbe haben. Kängurus mit den Zahlen, die durch 3 geteilt 1 Rest ergeben, müssen die gleiche Farbe haben. Kängurus mit den Zahlen, die durch 3 geteilt 2 Rest ergeben, müssen die gleiche Farbe haben. Bruce tippt darauf, dass Känguru 2 und Känguru 2021 grau ist. Für beide Zahlen gilt, dass sie durch 3 geteilt 2 Rest ergeben, die Kängurus müssen also die gleiche Farbe haben. Da er sich nur bei genau 1 Känguru geirrt hat, muss sein Tipp also richtig sein, und beide Kängurus sind grau. Bei Känguru 20 hat er blau getippt. Die Zahl 20 durch 3 geteilt ergibt aber auch 2 Rest, gehört also zur gleichen Zahlengruppe wie 2 und 2021 und **Känguru 20** müsste auch grau sein. Dieser Tipp ist somit der falsche.

28. Ein Quader mit den Maßen 3×4×5 besteht aus 60 kleinen Würfeln. Eine Termite frisst sich entlang der Raumdiagonale vom Eckpunkt P zum Eckpunkt Q. Diese Raumdiagonale hat mit keiner der Kanten der kleinen Würfel Schnittpunkte. Durch wie viele kleine Würfel muss sich die Termite durchfressen?

(A) 8 (B) 9 **(C)** 10 (D) 11 (E) 12



Die Termite frisst sich entlang der Raumdiagonale von P nach Q. Da diese Diagonale keine Schnittpunkte mit den Kanten der kleinen Würfel hat, frisst sich die Termite in einer Seitenfläche eines Würfels hinein und aus einer anderen Seitenfläche heraus. 1 durchfressener Würfel entspricht also 1 Abschnitt. Jedes Mal, wenn sich die Termite durch die Seitenfläche eines kleinen Würfels frisst, kommt sie in einen neuen Abschnitt. In der Abbildung sind die einzelnen Abschnitte dargestellt. Rot, wenn die Termite von rechts nach links frisst, Grün, wenn die Termite von oben nach unten frisst, und Blau, wenn die Termite von hinten nach vorne frisst. Es ist dabei nicht wichtig, welcher Würfel wo genau durchfressen wird, sondern durch wie viele Abschnitte sich die Termite frisst. Denn die Zahl der Abschnitte entspricht ja den durchfressenen Würfeln. Es sind 9 unterschiedliche Abschnitte (4 Rote + 3 Grüne + 2 Blaue) und der Anfangswürfel, durch den sich die Termite frisst. Insgesamt also 9 + 1 = **10 Würfel**.



29. In einer Stadt leben 2021 Personen, davon sind 21 Ritter und die übrigen 2000 sind Schurken. Ritter sagen immer die Wahrheit und Schurken lügen immer. Ein Zauberer bildet aus 2020 von ihnen 1010 Paare. Jede Person eines Paares beschreibt die andere Person entweder als Ritter oder als Schurke. 2000 Personen werden als Ritter bezeichnet und 20 Personen als Schurken.
Wie viele Paare bestehen aus zwei Schurken?

(A) 980 (B) 985 (C) 990 **(D)** 995 (E) 1000

Bei Paaren aus Rittern (R) und Schurken (S) können 3 verschiedene Paarungen zustande kommen: R+R, S+S und R+S. Treffen 2 Ritter aufeinander, werden sie wahrheitsgemäß sagen, dass der andere ein Ritter ist. Treffen 2 Schurken aufeinander, werden sie jeweils lügen und sagen, dass der andere ein Ritter ist. Wenn ein Ritter einen Schurken trifft, wird der Ritter wahrheitsgemäß sagen, dass er einen Schurken trifft und der Schurke wird sagen, dass er einen Schurken getroffen hat. Nur bei der Paarung R+S werden also Personen als Schurken bezeichnet. Da 20 Personen als Schurken beschrieben wurden, hat es also 20/2 = 10 Paare R+S gegeben. Es verbleiben noch 2000 − 10 = 1990 Schurken, die man zu 1990/2 = **995 Paaren** S+S zusammenlegen kann.

30. Bei einem Turnier mit sechs Mannschaften spielt jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft ein Spiel. In jeder Runde werden drei Spiele gleichzeitig gespielt. Ein TV – Sender hat bereits entschieden, welche Spiele er in welcher Runde übertragen wird. Wir sehen die ausgewählten Spiele in der abgebildeten Tabelle.
In welcher Runde wird das Team D gegen das Team F spielen?

	im TV
Runde 1	**A-B**
Runde 2	**C-D**
Runde 3	**A-E**
Runde 4	**E-F**
Runde 5	**A-C**

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Von Mannschaft A werden die drei Spiele A-B, A-C und A-E im TV gezeigt.

Schritt rot: Die Spiele A-D und A-F werden nicht gezeigt und müssen in Runde 2 und Runde 4 stattfinden. Da in Runde 2 schon C-D spielt, muss hier A-F spielen. In Runde 4 spielt also A-D. In Runde 2 müssen außerdem noch die Mannschaften B-E spielen. In Runde 4 müssen noch die Mannschaften B-C spielen.

	im TV	nicht übertragen	
Runde 1	**A-B**	**C-E**	**D-F**
Runde 2	**C-D**	**A-F**	**B-E**
Runde 3	**A-E**	**B-D**	**C-F**
Runde 4	**E-F**	**A-D**	**B-C**
Runde 5	**A-C**	**D-E**	**B-F**

Schritt blau: Nun wissen wir, wann Mannschaft E die Spiele A-E, B-E und E-F spielt. Die Spiele C-E und D-E müssen also in Runde 1 und Runde 5 stattfinden. Da in Runde 5 schon A-C spielt, kann hier nur D-E spielen. In Runde 1 spielt daher C-E und das verbleibende Spiel in Runde 1 heißt D-F. Das Team D spielt also in **Runde 1** gegen F.