Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

Lösungsvektor

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	A	B	B	B	C	D	C	A	E	D	B	C	A	A	C	E	E	C	E	E	E	A	A	D	D	D	E	B	C

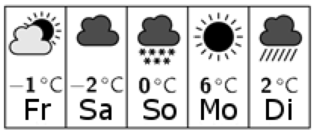
3 Punkte Beispiele

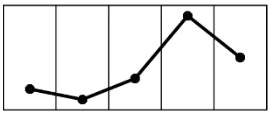
1. Jedes Jahr ist der dritte Donnerstag im März der Känguru-Tag. Die Känguru-Tage der kommenden Jahre sind im Folgenden aufgelistet. Dabei ist ein Fehler passiert. Welcher Eintrag ist falsch?

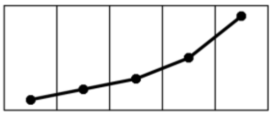
(A) 17. März 2022 (B) 16. März 2023 (C) 14. März 2024 (D) 20. März 2025 (E) 19. März 2026

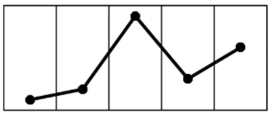
Im Jahr 2024 ist der 7. März der erste, der 14. März der zweite und erst der 21. März der dritte Donnerstag im Monat März, also ist **(C)** falsch.

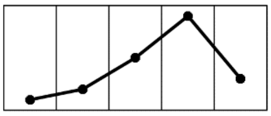
2. Jenny sieht in ihrer Wetter-App die vorhergesagten Höchsttemperaturen der nächsten fünf Tage, siehe Grafik. Wie sieht der dazu passende Graph aus?

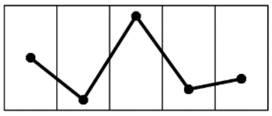


(A)


(B)


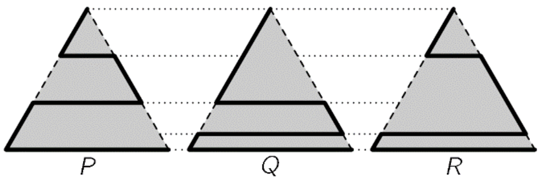
(C)


(D)


(E)


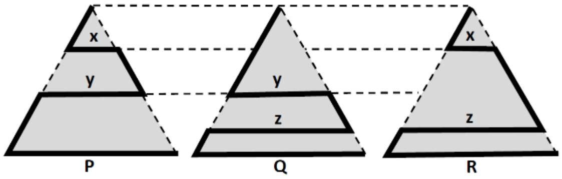
Wir können aus den in der App angezeigten Temperaturen ablesen, bei welchen Tagen der Punkt in der Grafik höher oder tiefer im Vergleich zu den anderen Tagen sein muss. Von Freitag auf Samstag sinkt die Temperatur, somit muss der zweite Wert niedriger als der erste sein, das schließt (B), (C) und (D) schon einmal aus. In (E) ist einerseits Montag nicht der wärmste Tag und anderseits Dienstag wärmer als Montag, was beides Ausschließungsgründe sind. Also passt nur **(A)**: von Freitag auf Samstag wird es kälter, dann steigt es an bis zum Höchstwert am Montag und sinkt am Dienstag wieder leicht ab.

3. In drei deckungsgleichen gleichseitigen Dreiecken sind jeweils Pfade (dicke Linien) vom oberen zum rechten unteren Eckpunkt eingezeichnet (siehe Abbildung). Welche Aussage über die Längen P, Q und R der Pfade ist wahr?



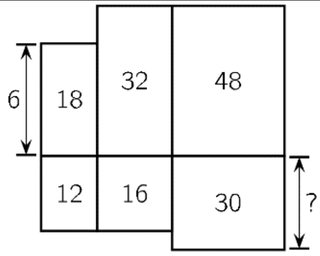
(A) $P < Q < R$ (B) $P < R < Q$
(C) $P < Q = R$ (D) $P = R < Q$ (E) $P = Q = R$

Die Teile der Pfade entlang der Seiten der drei gleichseitigen Dreiecke sind jeweils gleich lang. Folglich müssen nur die inneren Teile des Pfades (in der folgenden Abbildung mit x, y und z bezeichnet) verglichen werden, wobei $x < y < z$ gilt. Betrachtet man nun die Pfade in den einzelnen Dreiecken, stellt man fest, dass
$x + y < y + z < y + z$ gilt und damit $\boldsymbol{P} < \boldsymbol{R} < \boldsymbol{Q}$ ist.

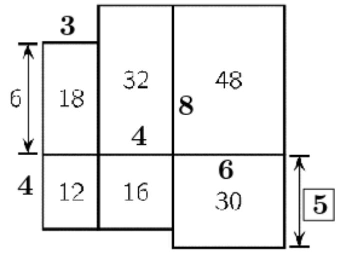


4. Sechs Rechtecke sind wie in der Abbildung zu sehen angeordnet. Das linke obere Rechteck ist 6 cm hoch. Die Zahlen in den Rechtecken geben deren jeweilige Fläche in cm^2 an. Wie hoch ist das rechte untere Rechteck?

(A) 4 cm (B) 5 cm (C) 6 cm (D) 7,5 cm (E) 10 cm



Beim linken oberen Rechteck kann man mit Hilfe der Fläche und der gegebenen Seitenlänge die Breite von 3 cm berechnen. Damit wiederum kann man die Höhe (4 cm) des „16er"-Rechtecks berechnen und geht auf diese Weise weiter vor. Schlussendlich gelangt man mit dem Wissen, dass die Breite des „30er"-Rechtecks 6 cm beträgt, zur Lösung, dass die Höhe desselben **5 cm** beträgt.



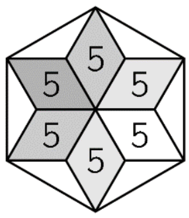
5. Zur Halbzeit eines Handballspiels führt das Gast-Team, der Zwischenstand ist 9:14.
In der zweiten Hälfte dominiert das Heim-Team. Es erzielt doppelt so viele Tore wie das Gast-Team und gewinnt insgesamt mit einem Tor Unterschied.
Wie lautet der Endstand des Spiels?

(A) 20:19 (B) 21:20 (C) 22:21 (D) 23:22 (E) 24:23

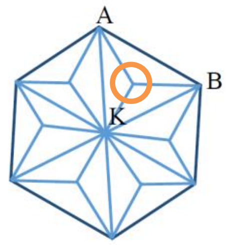
Sei x die Anzahl der Tore, die in der zweiten Hälfte vom Gast-Team erzielt werden. Dann gilt für die Spielendstand die Gleichung $9 + 2x - 1 = 14 + x$. Das „-1" drückt das eine Tor Unterschied des Heim-Teams aus.
Löst man die Gleichung, erhält man als Ergebnis $x = 6$. Das Gast-Team hat in der zweiten Spielhälfte also 6 Tore geschossen, was aufgrund der 14 Tore zur Halbzeit insgesamt 20 geschossene Tore macht. Das Heim-Team hat folglich $9 + 2 \cdot 6 = 21$ Tore geschossen, also lautet der Spiel-Endstand **21:20**.
Alternativlösung und Anmerkung: Man könnte auch zur richtigen Antwort kommen, indem man die Antwortmöglichkeiten betrachtet und damit das Torverhältnis in der zweiten Spielhälfte berechnet. Bei (A) wäre dies beispielsweise 11:5, was dem Satz „Es erzielt doppelt so viele Tore wie das Gast-Team" widerspricht. Auf die selbe Möglichkeit lassen sich die Distraktoren (C), (D) und (E) ausschließen und **(B)** bestätigen.

6. Sechs deckungsgleiche Rhomben mit jeweils $5\ \text{cm}^2$ Flächeninhalt bilden einen Stern. Verbindet man die Spitzen des Sterns, so erhält man ein regelmäßiges Sechseck (siehe Abbildung).
Welche Fläche hat das Sechseck?

(A) $36\ \text{cm}^2$ (B) $40\ \text{cm}^2$ (C) $45\ \text{cm}^2$ (D) $48\ \text{cm}^2$ (E) $60\ \text{cm}^2$



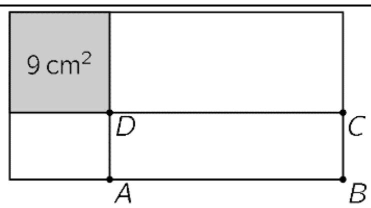
Die spitzen Winkel der Rhomben haben jeweils $60°$ (in der Mitte des Sterns stoßen die sechs Rhomben zusammen und somit hat einer dieser Winkel $360:6 = 60°$). Zeichnet man die langen Diagonalen der Rhomben ein, erhält man 18 deckungsgleiche, gleichschenkelige Dreiecke. Dass die 6 Dreiecke außerhalb des Sterns tatsächlich deckungsgleich mit jenen innerhalb sind, kann man sich beispielsweise wie folgt überlegen: Die stumpfen Winkel der Rhomben betragen je $120°$ (folgt direkt aus den $60°$), also muss auch der von den Schenkeln des äußeren Dreiecks eingeschlossene Winkel 120° betragen (wie im eingezeichneten orangen Bereich erkennbar). Folglich sind sowohl die beiden Schenkel als auch der von ihnen eingeschlossene Winkel in allen 18 Dreiecken gleich. Ein Dreieck hat die Fläche $2{,}5\ \mathrm{cm}^2$, also erhält man als Gesamtfläche des Sechsecks $18 \cdot 2{,}5\ \mathrm{cm}^2 = \mathbf{45\ cm^2}$.



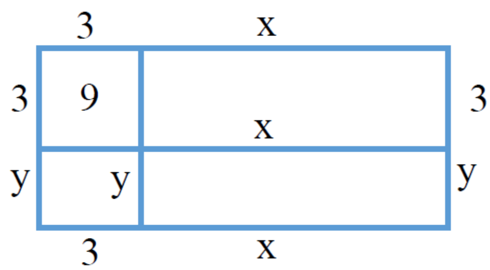
7. Adam, Bob und Conny sind gleich alt und Mitglieder einer Band. Die übrigen 3 Band-Mitglieder sind 19, 20 beziehungsweise 21 Jahre alt.
Wie alt ist Conny, wenn das durchschnittliche Alter aller Bandmitglieder 21 ist?
(A) 19 (B) 20 (C) 21 **(D)** 22 (E) 23

Sei a das Alter von Adam, Bob und Conny. Dann kann man mit $\frac{3a+19+20+21}{6} = 21$ berechnen, dass $a = \mathbf{22}$.
Alternativlösungen: Einfach ist es auch, gleich das Gesamtalter der Bandmitglieder zu berechnen ($6 \cdot 21 = 126$), davon die gegebenen Alter abziehen ($126 - 19 - 20 - 21 = 66$) und dies dann durch drei zu dividieren.
Ebenso sind logische Überlegungen möglich, wie beispielsweise: „Das Durchschnittsalter der anderen 3 Band-Mitgliedern ist 20 Jahre und da das Gesamtdurchschnittsalter 21 ist, müssen Adam, Bob und Conny ein Alter von 22 Jahren haben."

8. Ein Rechteck mit Umfang 30 cm wird durch eine waagrechte und eine senkrechte Linie in vier Teilfiguren zerlegt, von denen eine ein Quadrat mit Flächeninhalt $9\ \mathrm{cm}^2$ ist (siehe Abbildung).
Welchen Umfang hat das Rechteck $ABCD$?
(A) 14 cm (B) 16 cm **(C)** 18 cm (D) 21 cm (E) 24 cm



Das Quadrat hat eine Seitenlänge von 3 cm. Bezeichnet man die eingezeichneten unbekannten Teillängen mit x und y (siehe Abbildung rechts), erhält man für den Umfang des großen Rechtecks die Gleichung $30 = 4 \cdot 3 + 2x + 2y$.
Der Umfang des Rechtecks ABCD beträgt $2x + 2y$, was aus der oberen Gleichung ermittelt werden kann:
$2x + 2y = \mathbf{18cm}$.



9. Es gibt sechs dreistellige Zahlen, die jede der Ziffern 1, 3 und 5 genau einmal enthalten.
Wie viele dieser sechs Zahlen sind Primzahlen?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Egal, wie man die Ziffern 1, 3 und 5 zu einer dreistelligen Zahl anordnet, beträgt die Ziffernsumme dieser Zahl 9. Es gilt: Eine Zahl hat bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Ziffernsumme. Das bedeutet, dass alle dieser Zahlen schon sicher durch 9 teilbar sind, was ausschließt, dass eine dieser Zahlen eine Primzahl ist.

10. Klein-Känguru sucht nach einer besonderen Zahl. Es erhält dasselbe Resultat, wenn es $\frac{1}{10}$ von dieser Zahl abzieht oder wenn es diese Zahl mit $\frac{1}{10}$ multipliziert. Wie lautet die gesuchte Zahl?

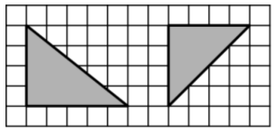
(A) $\frac{1}{100}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{11}{100}$ **(E)** $\frac{1}{9}$

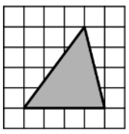
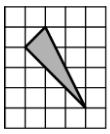
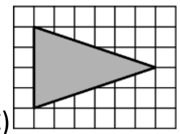
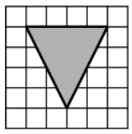
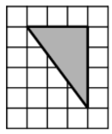
Sei x die gesuchte, besondere Zahl. Wenn man die Charakteristika dieser besonderen Zahl in eine Gleichung schreibt und löst, erhält man das Ergebnis $x = \mathbf{\frac{1}{9}}$.

$$x - \frac{1}{10} = x \cdot \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 10x - 1 = x \quad \Leftrightarrow \quad 9x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{9}$$

4 Punkte Beispiele

11. Alex zeichnet drei Dreiecke auf kariertes Papier. Zwei von ihnen sind rechts abgebildet. Folgendes ist noch bekannt: Genau zwei der Dreiecke besitzen gleichen Flächeninhalt, genau zwei von ihnen sind gleichschenkelig und genau zwei der Dreiecke sind rechtwinkelig. Welches könnte das dritte Dreieck sein?



(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Beide in der Angabe gegebenen Dreiecke sind rechtwinkelig, daher darf das gesuchte Dreieck nicht rechtwinkelig sein. Damit scheiden die Dreieck (B) und (E) aus: In Dreieck (B) schließen die Dreiecksseiten durch den linken Eckpunkt mit den Gitterlinien 45°-Winkel ein, in Dreieck (E) ist eine Seite waagrecht, eine senkrecht.

Weiters ist genau eines der gegebenen Dreiecke gleichschenkelig, daher muss auch das gesuchte Dreieck gleichschenkelig sein. Damit scheidet Dreieck (A) (Seitenlängen $4, \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}, \sqrt{3^2+4^2} = 5$) aus. Das Dreieck (C) hat den Flächeninhalt 12, während die gegebenen Dreiecke die Flächeninhalte 10 bzw. 8 haben. Weil das gesuchte Dreieck denselben Flächeninhalt wie eines der gegebenen Dreiecke haben muss, kommt nur mehr **(D)** als Lösung in Frage. Dieses hat wie das rechte gegebene Dreieck den Flächeninhalt 8.

12. Tom besitzt 10 Wunderkerzen derselben Größe. Er zündet die erste an. Als nur mehr ein Zehntel der Kerze übrig ist, zündet er die zweite Kerze an. Als nur mehr ein Zehntel dieser übrig ist, zündet er die dritte an und so weiter. Die Wunderkerzen brennen mit derselben Geschwindigkeit entlang der ganzen Länge der Kerze. Eine Wunderkerze brennt für 2 Minuten. Wie lange dauert es, bis alle 10 Wunderkerzen abgebrannt sind?

(A) 18 min 20 s **(B)** 18 min 12 s (C) 18 min (D) 17 min (E) 16 min 40 s

Während des Abbrennens aller 10 Wunderkerzen brennen 9-mal für ein Zehntel der gesamten Brenndauer von 2 Minuten = 120 Sekunden einer Wunderkerze je zwei Wunderkerzen gleichzeitig. Daher reduziert sich die Zeit des Abbrennens um $9 \cdot \frac{120\text{ s}}{10} = 108\text{ s} = 1\text{ min } 48\text{ s}$, sie beträgt daher statt 20 min nur **18 min 12 s**.

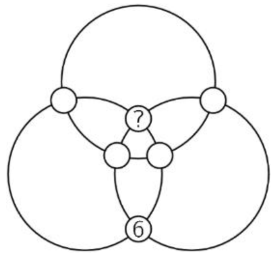
13. Andrea steigt acht Stufen hinauf. In jedem Schritt nimmt sie entweder eine Stufe oder zwei Stufen auf einmal. Die sechste Stufe kann sie nicht benutzen, weil sie kaputt ist. Auf wie viele verschiedene Arten kann Andrea die achte Stufe erreichen?

(A) 6 (B) 7 **(C)** 8 (D) 9 (E) 10

Weil die sechste Stufe kaputt ist und Andrea in jedem Schritt nur ein oder zwei Stufen auf einmal nehmen kann, ist die achte Stufe für sie nur von der siebenten Stufe aus und die siebente Stufe nur von der fünften Stufe aus erreichbar. Daher kann Andrea die achte Stufe unter den gegebenen Bedingungen auf gleich viele verschiedene Arten erreichen wie die fünfte Stufe.
Steigt sie zuerst auf die erste Stufe, dann bleiben für sie noch vier Stufen in Einser- und Zweierschritten zu überwinden. Dafür hat sie insgesamt 5 Möglichkeiten:
Entweder sie steigt jeweils eine Stufe hinauf (1 Möglichkeit), oder sie macht zwei Einserschritte und einen Zweierschritt in beliebiger Reihenfolge (3 Möglichkeiten), oder sie macht zwei Zweierschritte (1 Möglichkeit).
Steigt sie zuerst auf die zweite Stufe, dann hat sie für den Rest 3 Möglichkeiten: Entweder sie macht drei Einserschritte (1 Möglichkeit), oder sie macht einen Einserschritt und einen Zweierschritt und überspringt damit entweder die dritte oder die vierte Stufe (2 Möglichkeiten).
Andrea kann also die fünfte und damit auch die achte Stufe auf $5 + 3 = 8$ **verschiedene Arten** erreichen.
Anmerkung: Alternativ kann man die Anzahl der verschiedenen Arten die fünfte Stufe zu erreichen auch folgendermaßen bestimmen:
Die fünfte Stufe wird ausschließlich mit Einserschritten erreicht (1 Möglichkeit).
Zum Erreichen der fünften Stufe wird genau einmal durch einen Zweierschritt eine der Stufen 1 bis 4 übersprungen (4 Möglichkeiten).
Die fünfte Stufe wird durch zwei Zweierschritte und einen Einerschritt erreicht. Der Einserschritt kann dabei vor, zwischen oder nach den Zweierschritten gemacht werden (3 Möglichkeiten).
Insgesamt ergibt das wiederum 8 Möglichkeiten.

14. Drei Ringe schneiden einander. Jeder Schnittpunkt ist durch einen kleinen Kreis markiert. In diese Kreise sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, dass die Summe aller Zahlen entlang jedes Rings gleich groß ist. Die Zahl 6 ist bereits eingetragen (siehe Abbildung).
Welche Zahl muss im Kreis mit dem Fragezeichen stehen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

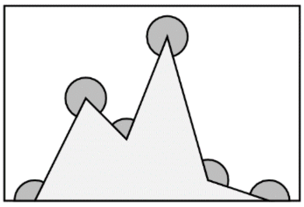


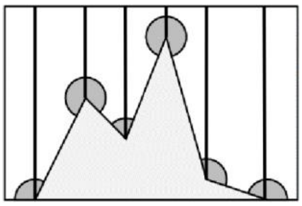
Wir bestimmen zuerst die „Ringsumme“ S aller Zahlen entlang eines Ringes.
Die Summe der Zahlen 1 bis 6 ist $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Weil jede Zahl in zwei der drei Ringe vorkommt, erhält man, wenn man die drei „Ringsummen“ zusammenzählt, die Gleichung $3 \cdot S = 2 \cdot 21 = 42$ beziehungsweise $S = 14$.
Jede der beiden Zahlen 4 und 5 kommt mit 6 gemeinsam in einem der drei Ringe vor, aber wegen $4 + 5 + 6 > 14$ nicht beide im selben Ring durch 6. Daher stehen 4 und 5 in zwei der vier kleinen Kreise am oberen Ring.
Im Ring mit den Zahlen 4 und 6 ist die Differenz zur Ringsumme 14 gleich 4, im Ring mit den Zahlen 5 und 6 ist die Differenz zur Ringsumme 14 gleich 3.
Sowohl zur Bildung der Restsumme 4 als auch zur Bildung der Restsumme 3 unter Verwendung von zwei der noch verbleibenden drei Zahlen 1, 2, 3 wird der Summand 1 benötigt. Daher muss im Kreis mit dem Fragezeichen beim zweiten Schnittpunkt der beiden Kreise durch 6 **die Zahl 1** stehen.
Alternative 1: Die Summe aller sechs verwendeten Zahlen ist $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.
Wie oben gezeigt wurde, ist jede „Ringsumme“ gleich 14. Weil die Kreise mit der Zahl 6 und mit dem Fragezeichen genau jene zwei Kreise sind, die nicht zum oberen Ring gehören, ist die Summe 6+? dieser zwei Zahlen gleich $21 - 14 = 7$.
Daher muss im Kreis mit dem Fragezeichen die Zahl 1 stehen.
Alternative 2: Wenn man die Paare (Summe der zwei Zahlen) der Kreise, die je zwei Ringe gemeinsam haben, zu u, v und w substituiert, erhält man $u + v = v + w = w + u$, also $u = v = w$
und wegen $u + v + w = 21$ (siehe vorherige Lösung) gilt $u = w = v = 7$. Insbesondere: $? = 7 - 6 = 1$.

15. Die Zahl 2021 hat Rest 5 bei Division durch 6, durch 7, durch 8 und durch 9.
Wie viele positive ganze Zahlen, die kleiner als 2021 sind, haben ebenfalls diese Eigenschaft?
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) keine

Eine Zahl hat (wie 2021) genau dann bei jeder der Divisionen durch 6, 7, 8 und 9 den Rest 5, wenn die um 5 kleinere Zahl durch 6, 7, 8 und 9 ohne Rest teilbar ist. Umgekehrt hat jede positive ganze Zahl, die um 5 größer ist als eine durch 6, 7, 8 und 9 teilbare Zahl, die geforderte Eigenschaft.
Wegen $6 = 2 \cdot 3, 8 = 2^3, 9 = 3^2$ gilt $\text{kgV}(6,7,8,9) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$. Daher haben alle positiven ganzen Zahlen der Form $504 \cdot k + 5$ kleiner als 2021 die geforderte Eigenschaft. Das ist der Fall für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ und ergibt die **vier Zahlen** 5, 509, 1013 und 1517.

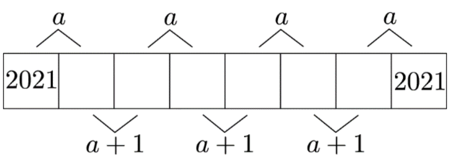
16. Wie groß ist die Summe der sechs markierten Winkel in der Abbildung?
(A) $360°$ (B) $900°$ **(C)** $1080°$ (D) $1120°$ (E) $1440°$





Wir legen durch den Scheitel jedes markierten Winkels eine Normale zur oberen Seite des Rechtecks.
Dadurch wird der Bereich über den 5 Seiten des im Rechteck eingezeichneten Streckenzugs in fünf Trapeze mit jeweils zwei rechten Winkeln zerlegt; darüber hinaus erhalten wir am linken und rechten Rand des Rechtecks zwei kleinere Rechtecke.
Jeder der sechs markierten Winkel wird dadurch in zwei Teilwinkel zerlegt:
In den zwei Rechtecken links und rechts liegt jeweils genau ein 90°-Teilwinkel.
Die beiden Teilwinkel in den 5 Trapezen ergänzen sich jeweils auf 180°.
Daher ist die Summe der sechs markierten Winkel $2 \cdot 90° + 5 \cdot 180° = \mathbf{1080}°$.

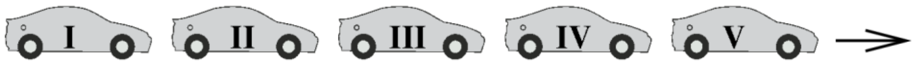
17. Der abgebildete Streifen ist in 8 Felder unterteilt.
Jedes Feld enthält eine Zahl. Die Summe zweier benachbarter Zahlen ist entweder a oder $a + 1$, wie abgebildet.
Die Zahlen im ersten und im achten Feld sind jeweils 2021.
Welchen Wert hat a?



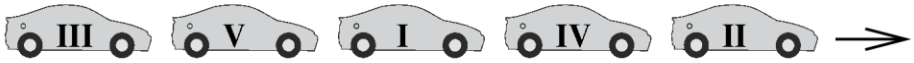
(A) 4041 (B) 4042 (C) 4043 (D) 4044 **(E)** 4045

Wir berechnen die Summe aller Zahlen im Streifen auf zwei Arten.
Beachten wir die Zahlen über dem Streifen, so ergibt sich als Summe $4a$.
Beachten wir die Zahlen unter dem Streifen, so ergibt sich als Summe $3(a + 1) + 2 \cdot 2021 = 3a + 4045$.
Das ergibt die Gleichung $4a = 3a + 4045$ mit der Lösung $\boldsymbol{a} = \mathbf{4045}$.
Alternative 1: Weil von links nach rechts die Summe benachbarter Zahlen abwechselnd a und $a + 1$ ist, ist die dritte Zahl gleich 2022, die vierte Zahl um 1 kleiner als die zweite Zahl, die fünfte Zahl gleich 2023 und letztlich die siebente Zahl gleich 2024. Daher gilt $a = 2024 + 2021 = 4045$
Alternative 2: Aufgrund der Symmetrie des Streifens ist auch die dritte Zahl von rechts gleich 2022, die fünfte Zahl von rechts (= vierte Zahl von links) gleich 2023. Damit ergibt sich $a + 1 = 2 \cdot 2023 = 4046, a = 4045$.

18. Fünf Autos nehmen an einem Rennen teil. Dieses Bild zeigt ihre Startaufstellung:



Die Autos erreichen das Ziel in folgender Reihenfolge:

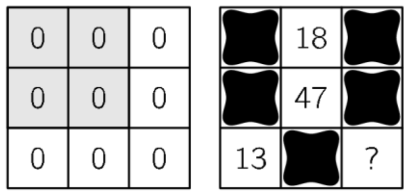


Bei jedem Überholmanöver überholt stets ein Auto genau ein anderes Auto.
Wie viele Überholmanöver hat es in diesem Rennen mindestens gegeben?

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

Sechs Überholmanöver reichen aus, um die Reihenfolge im Ziel herzustellen, etwa so:
Zuerst überholt Wagen 2 alle vor ihm liegenden Autos (3 Überholmanöver, Reihenfolge 1-3-4-5-2).
Dann überholt Wagen 4 Wagen 5 (1 Überholmanöver, Reihenfolge 1-3-5-4-2).
Zuletzt überholt Wagen 1 die Wagen 3 und 5 (2 Überholmanöver; Reihenfolge wie im Ziel 3-5-1-4-2).

19. Jedes Feld eines 3×3 Quadrates wird zu Beginn mit der Zahl 0 beschriftet. Danach wählen wir ein beliebiges 2×2 Teilquadrat (zum Beispiel das in der linken Abbildung grau markierte Teilquadrat) und erhöhen jeden Eintrag um jeweils 1. Nachdem wir diesen Vorgang einige Male wiederholt haben, erhalten wir die rechts dargestellte Beschriftung. Unglücklicherweise sind einige Einträge nicht sichtbar.
Welche Zahl steht in dem Feld mit dem Fragezeichen?



(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 19

Das zentrale Feld des 3×3 Quadrates (mit der Zahl 47) gehört zu jedem beliebigen 2×2 Teilquadrat, daher werden insgesamt 47-mal Einträge um 1 erhöht. 18-mal betrifft das eines der beiden oberen 2×2 Teilquadrate, daher werden 29-mal die Einträge in einem der beiden unteren 2×2 Teilquadrate um 1 erhöht. 13-mal betrifft das das linke untere 2×2 Teilquadrat, als werden 16-mal alle Zahlen im rechten unteren 2×2 Teilquadrat erhöht; im Feld mit dem Fragezeichen steht also die Zahl **16**.

20. Bei einem Teamwettbewerb starten fünf Teams mit 9, 15, 17, 19 beziehungsweise 21 Mitgliedern. Jedes Team besteht entweder nur aus Mädchen oder nur aus Burschen. Alle Mitglieder eines Teams starten gleichzeitig. Nach dem Start des ersten Teams ist unter den noch auf den Start Wartenden die Anzahl der Mädchen dreimal so groß wie die Anzahl der Burschen.
Aus wie vielen Personen besteht jenes Team, das bereits gestartet ist?

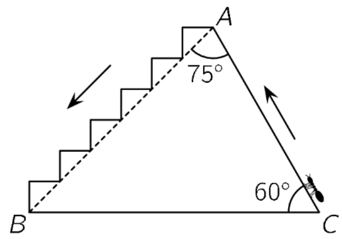
(A) 9 (B) 15 (C) 17 (D) 19 (E) 21

Insgesamt hat der Wettbewerb 81 TeilnehmerInnen. Wenn nach dem Start des ersten Teams noch dreimal so viele Mädchen wie Burschen auf den Start warten, dann bedeutet das, dass nach dem Start des ersten Teams noch eine durch 4 teilbare Anzahl von TeilnehmerInnen auf den Start warten. Daher startet zuerst das Team mit 17 oder 21 Mitgliedern.
Im ersten Fall warten noch 64 Personen auf den Start, von ihnen müssten ein Viertel, also 16 Burschen sein, was aufgrund der gegebenen Teamgrößen nicht möglich ist.
Im zweiten Fall warten noch 60 Personen – 15 Burschen und 45 Mädchen – auf den Start. Das ist möglich, wenn die Teams mit 9, 17 und 19 Mitgliedern Mädchenteams sind. Somit besteht das schon gestartete Team aus **21 Personen**.

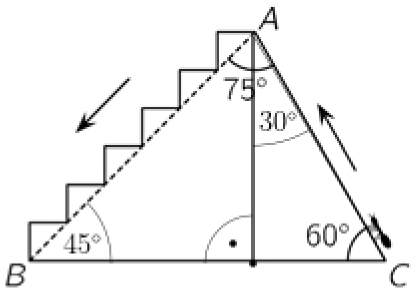
5 Punkte Beispiele

21. Eine Ameise klettert vom Punkt C geradlinig zum Punkt A hoch und krabbelt danach über die Treppe wieder hinunter zum Punkt B (siehe Abbildung).
Wie groß ist das Verhältnis der Länge der Strecke CA zur Länge des Pfades AB entlang der Treppe?

(A) $1:1$ (B) $1:2$ (C) $1:3$ (D) $1:\sqrt{2}$ **(E)** $1:\sqrt{3}$



Wegen der Winkelsumme $180°$ im Dreieck erkennen wir, dass die strichlierte Linie *BA* die Steigung 1 bzw. den Steigungswinkel $45°$ hat.
Zeichnet man in A die Höhe ein, erhält man rechts ein Dreieck mit den Winkeln $90°$, $60°$ und $30°$ -
ein „halbes gleichseitiges Dreieck".
Wählen wir für die Strecke CA die Länge 2, dann hat die Höhe des gleichseitigen Dreiecks die Länge $\sqrt{3}$.
Die Länge des Treppenweges von A nach B ist zwei Mal diese Höhe.
Wir erhalten für das Verhältnis der Wege:
CA : Länge des Pfades entlang der Treppe $= 2 : 2\sqrt{3} = \mathbf{1} : \sqrt{\mathbf{3}}$



22. Es ist bekannt, dass $a+b+c=0$ ist und $abc=78$.
Wie groß ist der Wert von $(a+b)(b+c)(c+a)$?

(A) -156 (B) -39 (C) 78 (D) 156 **(E)** ein anderer Wert

Wegen $a+b+c=0$ gilt: $a+b=-c,\ b+c=-a$ und $c+a=-b.$
Wir erhalten wegen der Angabe $abc=78$, dass
$(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)=(-c)\cdot(-a)\cdot(-b)=-78$, also **(E), ein anderer Wert** als (A) - (D).
Bemerkung: Zahlentripel mit dieser Eigenschaft sind zum Beispiel:
$\left(\frac{13}{\sqrt[3]{5}},-\frac{3}{\sqrt[3]{5}},-\frac{10}{\sqrt[3]{5}}\right)$ oder $\left(\frac{27}{\sqrt[3]{9}},-\frac{26}{\sqrt[3]{9}},-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)$.

23. Es sei N die kleinste Zahl, deren Ziffernsumme 2021 ist. Wie groß ist die Ziffernsumme von $N+2021$?

(A) 10 (B) 12 (C) 19 (D) 2021 (E) 2026

Damit eine Zahl mit großer Ziffernsumme möglichst klein wird, muss sie möglichst wenige Stellen haben.
Dies erreicht man, indem man am Ende der Zahl nur 9 setzt.
Die Ziffernsumme von 2021 ist 5, das ist dann die erste Ziffer von N.
Es ist nicht nötig, die Anzahl der Stellen von N zu bestimmen, denn wenn man 1 zu N addiert, erhält man ein Zahl mit 6 als erster Stelle und alle anderen Stellen sind 0. Addiert man nun noch 2020, dann erhält man $N + 2021 = 60000\ldots0002020$. Also nur drei Stellen sind verscheiden von 0 und die gesuchte Ziffernsumme beträgt $\mathbf{10}$.
Berechnung von N:
Wegen

$$2021 = 2\cdot 1000 + 2\cdot 10 + 1 = 2\cdot(999+1) + 2\cdot(9+1) + 1 =$$
$$= 9\cdot(2\cdot 111 + 2) + 2 + 2 + 1 = 9\cdot 224 + 5$$

hat die Zahl N 225 Stellen: vorne 5 und dann 224 Mal die Ziffer 9. $N = 6\cdot 10^{224} - 1$und daher gilt

$$N + 2021 = (N+1) + 2020 = 6 \cdot 10^{224} + 2020 = 6\ \underbrace{000\ldots000}_{2020\text{ Mal }0}\ 2020$$

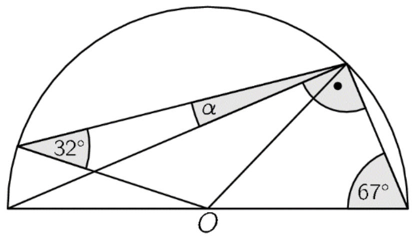
Bemerkung: Bei der Suche nach der kleinsten Zahl N bei gegebener Ziffernsumme ist die erste Ziffer immer die Ziffernsumme bzw. davon die Ziffernsumme etc.
Zum Beispiel hat die kleinste Zahl mit Ziffernsumme 5789 links die Ziffer 2, da

$$5789 \xrightarrow[\textit{Ziffernsumme}]{} 29 \xrightarrow[\textit{Ziffernsumme}]{} 11 \xrightarrow[\textit{Ziffernsumme}]{} 2$$

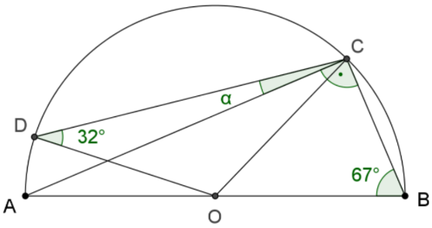
Es gilt: Eine Zahl hat bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Ziffernsumme.
Daraus folgt auch die bekannte 9er-Teilbarkeitsregel

24. Die Abbildung zeigt einen Halbkreis mit Mittelpunkt O.
Die Größen einiger Winkel sind gegeben.
Wie groß ist der Winkel α?

(A) 9° (B) 11° (C) 16° (D) 17,5° (E) 18°



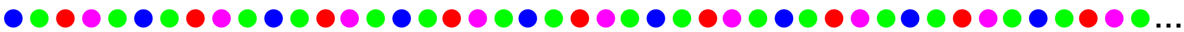
Wegen des Halbkreises sind die Dreiecke BCO und CDO gleichschenkelig mit jeweils zwei gleichen Winkeln.
Wir erhalten $\alpha + 90^\circ = 32^\circ + 67^\circ \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 9^\circ}$.



25. 2021 Bälle werden in einer Reihe aufgelegt und von links nach rechts mit den Zahlen 1 bis 2021 beschriftet. Jeder Ball ist in einer der vier Farben grün, rot, pink oder blau gefärbt. Unter beliebigen fünf aufeinanderfolgenden Bällen befinden sich immer genau ein roter, ein pinker und ein blauer Ball. Rechts von jedem roten Ball befindet sich ein pinker Ball. Die Bälle mit den Nummern 2 und 20 sind grün.
Welche Farbe hat der Ball mit der Nummer 2021?

(A) Grün (B) Rot (C) Pink **(D)** Blau (E) Das ist nicht eindeutig bestimmbar.

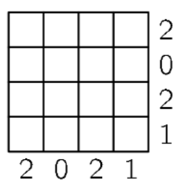
Da unter fünf aufeinander folgenden Bällen genau einer rot, einer pink und einer blau ist, müssen die beiden anderen grün sein.
Aus dieser Eigenschaft folgt auch, dass sich die Farben periodisch wiederholen mit Periodenlänge 5.
Da der 20. Ball grün ist, muss auch der 5. Ball grün sein, wegen des 2. Balls auch der 7.
Wegen der Nachbarschaft von rot und pink müssen diese zwischen 2. und 5. Ball liegen.
Somit ist die Reihenfolge fix:
Blau, grün, rot, pink, grün, blau, grün, rot, pink, grün, blau, grün, rot, pink, grün, blau, …



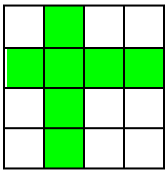
Der letzte Ball hat die gleiche Farbe wie der erste Ball, da $2021 = 1 + 5 \cdot 404$, ist also **blau**.

26. In einer 4×4 Tabelle müssen einige der Felder schwarz angemalt werden. Die Zahlen neben und unter der Tabelle zeigen, wie viele Zellen genau in der entsprechenden Zeile bzw. Spalte schwarz angemalt werden müssen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Tabelle anzumalen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 **(D)** 5 (E) mehr als 5

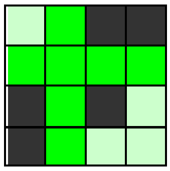


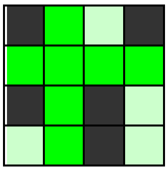
Diese Aufgabe lässt sich durch systematisches Probieren lösen. Eine Möglichkeit ist, die nicht angemalten Felder in der ersten Zeile zu variieren:



Wegen der beiden 0 in der Angabe, dürfen nur neun der 16 Fehler bemalt werden. Das ist bereits eine starke Einschränkung.
Die grünen Felder dürfen nicht bemalt werden.

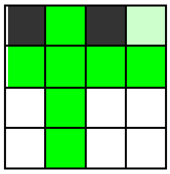
Fall 1: Wird das linke obere Feld auch nicht bemalt, dann müssen die beiden anderen in der ersten Spalte und ersten Zeile bemalt werden. Damit ist die vierte Zeile und vierte Spalte fixiert – es gibt nur eine Möglichkeit.

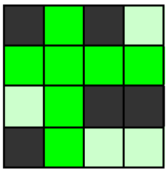


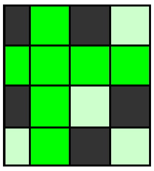


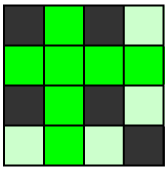
Fall 2: Das dritte Feld in der ersten Zeile bleibt frei. Dann müssen die unteren beiden Felder in der dritten Spalte bemalt werden, die unteren beiden in der 4. Spalte bleiben frei. Zuletzt muss das dritte Feld in der ersten Spalte bemalt werden.

Fall 3: Das letzte Feld in der ersten Zeile bleibt frei. Nun muss in jeder der drei noch zu belegenden Spalten genau ein weiteres Feld bemalt werden. Da in der letzten Zeile genau ein Feld bemalt wird (bzw. in der dritten Zeile ein weiteres nicht bemalt) gibt es folgende drei Möglichkeiten.









Insgesamt gibt es also **fünf Möglichkeiten**.

27. Wie viele vierstellige positive ganze Zahlen gibt es, für die das Produkt ihrer Ziffern jeweils gleich 100 ist?
(A) 6 (B) 12 (C) 16 **(D)** 18 (E) 24

Mithilfe der Primfaktorenzerlegung von $100 = 2^2 \cdot 5^2$ erhält man zwei Varianten für derartige Zahlen: Da alle Ziffern kleiner als 10 sein müssen (und 0 ist auch verboten), müssen zwei der Ziffern 5 sein. Für die restlichen beiden Ziffern gibt es zwei Möglichkeiten: 2 Mal die Ziffer 2 oder eine Ziffer 4 und die andere Ziffer 1.
Wir müssen noch zählen, wie viele Möglichkeiten es jeweils gibt:
Zwei Mal Ziffer 2 und 2 Mal Ziffer 5: Dafür gibt es sechs Möglichkeiten.
Von den vier Stellen müssen zwei ausgewählt werden, an denen man die Ziffer 2 (bzw. 5) setzt, die restlichen werden mit der anderen Ziffer belegt. Dafür gibt es folgende sechs Möglichkeiten:
2255, 2525, 2552, 5225, 5252, 5522.
Bemerkung: Dies ist analog zur Aufgabe
„Wie viele Verbindungsstrecken haben vier Punkte, die ein Viereck bilden?“
Man muss zwei Punkte auswählen, die man verbindet. Die Strecken sind die vier Seiten und die zwei Diagonalen – also sechs Möglichkeiten.
Im zweiten Fall gibt es zwölf Möglichkeiten: Wir können die Ziffer 1 an vier verschiedene Stellen setzen, für die Ziffer 4 haben wir dann nur mehr drei freie Stellen, die übrigen beiden Stellen werden mit der Ziffer 5 belegt.
Diese zwölf Zahlen lauten:
1455, 1545, 1554, 4155, 4515, 4551, 5145, 5154, 5415, 5451, 5514, 5541.
Es gibt also insgesamt **18 Zahlen** mit der gewünschten Eigenschaft.

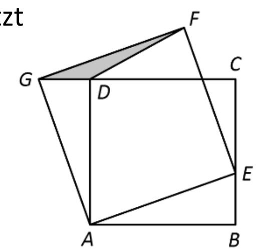
28. Drei Spieler schreiben je 10 Wörter auf. Jeder Spieler bekommt drei Punkte für jedes Wort, das kein anderer Spieler aufgeschrieben hat. Wenn genau ein weiterer Spieler dasselbe Wort aufgeschrieben hat, bekommen beide Spieler je einen Punkt. Für Wörter, die alle drei Spieler aufgeschrieben haben, bekommt kein Spieler einen Punkt. Als die Spieler ihre Punkte berechnen, stellen sie fest, dass je der eine andere Anzahl an Punkten erzielt hat. Samuel hat mit 19 am wenigsten Punkte und Johannes am meisten.
Wie viele Punkte hat Johannes erzielt?

(A) 20 (B) 21 (C) 23 (D) 24 **(E)** 25

Für die Zahl 19 gibt es nur zwei Möglichkeiten, diese Zahl als Summe von 10 Zahlen aus der Menge $\{3, 1, 0\}$ darzustellen: $19 = 6 \cdot 3 + 1 + 3 \cdot 0 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0$ (weil $4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 < 19$ und $7 \cdot 3 + 3 \cdot 0 > 19$).
Die erste Variante würde aber bedeuten, dass alle drei Spieler für drei Wörter keine Punkte bekommen. Johannes müsste 7 Mal 3 Punkte erhalten, also mit niemandem ein weiteres Wort gemeinsam. Der dritte Spieler hätte aber dann mit Samuel ein Wort gemeinsam und würde ebenfalls 19 Punkte erhalten – im Widerspruch zur Information, dass alle drei Punktesummen verschieden sind.
Wir wissen daher, dass Samuel fünf Mal 3 Punkte, vier Mal 1 Punkt und einmal 0 Punkte erhalten hat. Daraus folgt, dass alle drei Spieler für neun Wörter Punkte bekommen haben.
Die Frage ist nun, mit wem hat Samuel *ein* Wort gemeinsam (1 Punkt)?
Wäre das bei beiden Spielern je 2 Mal der Fall, dann würden die beiden anderen Spieler gleich viel Punkte erhalten – sie hätten sicher gleich oft 3 Punkte (hätten sie kein Paar gemeinsamer Wörter, würden beide 23 Punkte erhalten, bei einem Paar nur mehr 21, bei zwei Paaren nur 19 wie Samuel)
Samuel muss also mit einem Spieler drei Paare gemeinsam haben und mit einem eines.
Jener, der drei Paare mit Samuel gemeinsam hat, kann maximal $6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 21$ Punkte erhalten. Würde dieser mit dem anderen Spieler auch ein gemeinsames Paar haben, könnte er nicht mehr Punkte als Samuel haben. Also muss der zweitbeste Spieler 21 Punkte und nur mit Samuel gemeinsame Wortpaare haben.
Johannes, der Sieger, hat also einmal 0 Punkte, einmal 1 Punkt (er hat nur mit Samuel nur ein Wortpaar) und daher acht Mal 3 Punkte, also insgesamt **25 Punkte** erhalten.

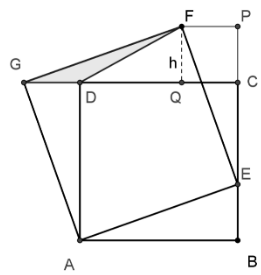
29. Das Quadrat *ABCD* besitzt einen Flächeninhalt von 16 und das graue Dreieck *DFG* besitzt einen Flächeninhalt von 1 (siehe Abbildung).
Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrates *AEFG*?

(A) 17 **(B)** 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21



Wir erkennen, dass die Dreiecke *ABE* und *ADG* kongruente rechtwinkelige Dreiecke sind.
Hilfreich ist es, das Dreieck *ADG* parallel zu verschieben und erhalten *EPF*.
Wir erkennen, dass $DG = BE = PF = CQ = CP = QF$
Da $QF = h$ die Höhe des schraffierten Dreiecks und GD die gleich lange Basis ist, erhalten wir wegen der Dreiecksfläche :

$$A_{DFG} = 1 = \frac{h^2}{2} \Rightarrow h = \sqrt{2}.$$



Für die Seitenlänge a des Quadrats $ABCD$ gilt $a = 4$, da der Flächeninhalt 16 beträgt.
Mit dem Satz von Pythagoras in ADG erhalten wir die Seitenlänge und die Fläche des Quadrats $AEFG$:

$$A_{AEFG} = AG^2 = AD^2 + DG^2 = 16 + 2 = \mathbf{18}.$$

30. Christina besitzt acht Münzen, deren Massen in Gramm acht verschiedene positive ganze Zahlen sind. Wenn Christina auf jede Seite einer Balkenwaage jeweils zwei Münzen legt, so ist die Seite, auf der sich die schwerste dieser vier Münzen befindet, immer die schwerere. Wie viele Gramm wiegt die schwerste der acht Münzen mindestens? (A) 8 (B) 12 **(C)** 34 (D) 128 (E) 256

Die Bedingung muss für jede Vierergruppe von Münzen gelten.
Betrachten wir zunächst die vier leichtesten Münzen. Wären diese 1g, 2g, 3g und 4g schwer, so wäre wegen 2+3=1+4 die Bedingung verletzt. Die schwerste der vier muss also zumindest 5g schwer sein.
Wir wählen also die vier leichtesten mit 1g, 2g, 3g, 5g.
Wenn wir nun eine fünfte Münze dazu nehmen – welche Masse m_5 ist dafür mindestens notwendig?
Betrachten wir den „worst case“: die beiden schwersten der übrigen vier sind „Gegner“ der neuen Münze – diese hat als „Partner“ die leichteste mit 1g
Wir erhalten: $3 + 5 < 1 + m_5$ als Bedingung:
Die kleinste Möglichkeit für m_5, die Masse der fünften Münze, ist also 3g+5g=8g
Analog gilt für m_6, dass $5 + 8 < 1 + m_6$ – also wählen wir optimal $m_6 = 13$g.
Analog gilt für m_7, dass $8 + 13 < 1 + m_7$ – also wählen wir optimal $m_7 = 21$g,
und schließlich gilt für m_8, dass $13 + 21 < 1 + m_8$ – also wählen wir optimal $m_8 = \mathbf{34g}$
Bemerkung: Diese Folge $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ ist die berühmte FIBONACCI-Folge, die bei vielen mathematischen Problemen die Lösung ist und auch in der Natur häufig auftritt.
Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/*Fibonacci-Folge*.