Känguru 2020 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Es ist $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2880$, also ist die Summe der letzten zwei Ziffern gleich **8**.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Beim Bewerb ist es mühsam, das ganze Produkt im Kopf auszurechnen, man kann es sich aber erleichtern. Die beiden 1er sind irrelevant. Ein 2er und ein 5er ergeben zusammen einen Faktor 10, also endet die Zahl mit 0.

   Vom verbliebenen Produkt $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ interessiert uns nur die letzte Ziffer, also können wir nach jeder Multiplikation alle Ziffern außer der Einerziffer „wegwerfen" (der Experte sagt dazu: „modulo 10 rechnen" und schreibt zum Beispiel $38 \equiv 8$) und berechnen auf diese Art $3 \cdot 4 = 12 \equiv 2$, dann $2 \cdot 4 = 8$, dann $8 \cdot 3 = 24 \equiv 4$, und schließlich $4 \cdot 2 = 8$. Die vorletzte Ziffer ist also 8.

2. Die waagrechten Strecken auf den Quadern sind in Summe genau gleich lang wie die waagrechte Strecke am Boden war. Zusätzlich zum früheren Weg muss die Ameise also nur die Quader hinauf und wieder hinunter klettern, und legt dabei 4 m zusätzlich zurück. Insgesamt ist ihre Strecke daher $5\,\text{m} + 4\,\text{m} =$ **9 m**.

3. Wir sehen, dass a und b beide „etwas" kleiner als 1 sind. Wenn man irgendeine reelle Zahl x mit einer Zahl multipliziert, die „etwas kleiner als 1" ist, ist das Ergebnis „etwas" kleiner als x. Wenn man also a mit b multipliziert, dann ist das Ergebnis etwas kleiner als a und auch etwas kleiner als b. Das schließt einmal die Möglichkeiten r, s und t aus.

   Nun vermuten wir noch, dass p viel zu klein ist. Das können wir auch verifizieren: Sowohl a als auch b sind mindestens $3/4$ groß, somit ist ihr Produkt mindestens $9/16 = 0{,}5625$. Aber p ist kleiner als $1/4$.

   Deswegen kann nur $\boldsymbol{q}$ das Produkt $a \cdot b$ sein.

4. Zu Fuß und mit dem Auto kommen ungefähr gleich viele, und die einzigen zwei Kreisstücke, die relativ ähnlich groß sind, sind 11% und 12%. Von den verbliebenen ist nur 47% etwa doppelt so groß wie 24%, der Faktor zwischen den anderen beiden Kombinationen ist viel größer. Daher kommt der größte Anteil von 47% mit dem Fahrrad (sehr umweltbewusst!), 24% mit öffentlichen Verkehrsmitteln, jeweils etwa 11% bis 12% zu Fuß bzw. mit dem Auto, und somit bleiben **6%**, die mit dem Moped anreisen.

5. Natürlich können wir das mit einem großen Taschenrechner einfach ausrechnen und erhalten **7070**.

   Ohne Taschenrechner behelfen wir uns am besten damit, dass wir zuerst herausheben und dann kürzen:

$$\begin{aligned}\frac{1010^2 + 2020^2 + 3030^2}{2020} &= \frac{1010 \cdot 1010 + 1010 \cdot 1010 \cdot 2 \cdot 2 + 1010 \cdot 1010 \cdot 3 \cdot 3}{1010 \cdot 2} \\ &= \frac{1010 \cdot 1010 \cdot (1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3)}{1010 \cdot 2} \\ &= \frac{1010 \cdot 1010 \cdot 14}{1010 \cdot 2} \\ &= 1010 \cdot 7 = \mathbf{7070}.\end{aligned}$$

6. An der Einer-, Zehner- und Hunderterstelle kommt beim Addieren jeweils dieselbe Summe $S = A + B + C + D + E$, plus ein eventueller Übertrag von der vorigen Stelle, heraus.

   Aus der Einerstelle von 2664 folgt daher, dass auch die Einerstelle von S gleich 4 ist. Die Zehnerstelle von 2664 setzt sich zusammen aus derselben Einerstelle von S und dem Übertrag, also ist der Übertrag (der der Zehnerstelle von S entspricht) gleich 2. Daher ist $S =$ **24**, wie wir auch leicht überprüfen können: $24 + 240 + 2400 = 2664$.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Alternativ können wir auch umgekehrt überlegen, dass 2664 sich zusammensetzt aus $S + 10S + 100S = 111S$. Also ist $S = 2664/111 = 24$.

7. Nehmen wir an, b ist bereits so groß wie möglich. Wenn b echt kleiner als c wäre, könnten wir $b' = c' = \sqrt{bc}$ setzen, dann ist weiterhin $ab'c' = abc = 1\,000\,000$ und $1 \leq a \leq b \leq c$ erfüllt, also hätten wir eine Möglichkeit mit einem größeren b gefunden. In einer optimalen Lösung ist also $b = c$.

Wegen $b^2 = bc = 1\,000\,000/a$ ist b^2 umso größer, je kleiner a ist. Wegen $1 \leq a$ ist daher $b^2 \leq 1\,000\,000$ und somit $b \leq 1\,000$. Tatsächlich ist $a = 1$ und $b = c = 1\,000$ eine mögliche Belegung der Zahlen, also ist **1000** der größtmögliche Wert von b.

8. Ein einzelner Hund wiegt $\frac{K}{D}$. Daher wiegen M Hunde zusammen $\frac{K}{D} \cdot M$, das entspricht laut Angabe dem Gewicht von E Elefanten. Um das Gewicht eines einzelnen Elefanten zu erhalten, müssen wir das daher noch durch E dividieren, und erhalten $\boldsymbol{\frac{K \cdot M}{D \cdot E}}$.

9. Wir stellen uns vor, dass wir die zwei Würfel nacheinander würfeln. Der erste Würfel hat ein beliebiges Ergebnis, und nun berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Würfel dasselbe Ergebnis zeigen wird. Egal, wie der erste Würfel fällt, der zweite Würfel hat zwei Seiten, die die passende Farbe haben, also ist die Wahrscheinlichkeit jedenfalls $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Natürlich können wir auch mit etwas weniger Tricks rechnen: Die Wahrscheinlichkeit, dass beide rot sind, ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide blau sind, gleich $\frac{1}{9}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass beide weiß sind, ebenso. In Summe ist die Wahrscheinlichkeit daher $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$.

10. Für jedes n ist $\boldsymbol{6n - 1}$ um 1 kleiner als ein Vielfaches von 6 (und damit insbesondere ein Vielfaches von 3), kann also nie selbst durch 3 teilbar sein.

    Für die anderen vier Terme finden wir Werte von n, für die das Ergebnis durch 3 teilbar ist, beispielsweise $5 \cdot 1 + 1 = 6$, $3^2 = 9$, $3 \cdot 4 = 12$ und $2^3 - 2 = 6$.

11. Wir bezeichnen mit g den gesamten Flächeninhalt des großen Rechtecks und mit k den gesamten Flächeninhalt des kleinen Rechtecks, sowie mit u den Flächeninhalt des überlappenden Bereichs. Dann gilt $G = g - u$ und $K = k - u$, also $G - K = (g - u) - (k - u) = g - k$, also hängt der Wert nur von den Flächen der beiden Rechtecke ab und ist somit **in allen Fällen gleich groß**.

12. Mit **drei** Schritten ist es möglich: Wir nennen die Münzen A, B, C, D, E. Im ersten Schritt drehen wir Münzen A, B und C um, im zweiten Schritt Münzen A, B und D, und im dritten Schritt Münzen A, B und E.

    Mit einem Schritt ist es eindeutig nicht möglich, weil dabei mindestens zwei Münzen gar nicht berührt wurden. Mit zwei Schritten kann es nicht gehen, weil danach in Summe 6 Mal eine Münze gewendet wurde, wobei aber jede Münze mindestens ein Mal gewendet werden muss. Damit müssen 5 der 6 Münzdrehungen dazu verwendet werden, jede der Münze ein Mal umzudrehen, und mit der sechsten wird eine Münze wieder zurückumgedreht.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Wir können auch ganz allgemein zeigen, dass es mit einer geraden Anzahl von Schritten nie gehen kann: Nach einer geraden Anzahl von Schritten ist die Anzahl der Münzdrehungen, die durchgeführt wurden, ein Vielfaches von 6, also gerade. Wenn wir umgekehrt zusammenzählen, wie oft bis zum Ende jede Münze gewendet wurde, muss jede Münze ungerade oft gewendet worden sein, und die Summe von fünf ungeraden Zahlen wäre ungerade.

13. Wir zählen die Flächeninhalte der zusammengeklebten Stellen zusammen.

    Der vordere Quader und der linke kleben an einer Stelle in Größe der kleinsten Seite zusammen, also fällt diese Fläche zwei Mal weg (einmal die kleine Seite vom vorderen Quader und einmal ein Stück der Seitenfläche vom linken Quader).

    Die beiden rechten hinteren Quader kleben entlang ihrer Ober- bzw. Unterseite zusammen, also fällt diese Fläche zwei Mal weg.

    Zuletzt klebt der rechte hintere untere Quader über seine gesamte Seitenlänge an zwei anderen Quadern, womit auch die Fläche dieser Seite in Summe genau zwei Mal wegfällt.

    Insgesamt ersparen wir uns damit das Färben von genau einer Quaderoberfläche, und benötigen daher **3 Liter**.

14. Jeder der quadratischen Terme hat einen Wert von 0 oder 1 oder mindestens 4. Wir behaupten, dass deswegen **1** nicht erreicht werden kann. Damit die Summe 1 ist, müsste genau einer der drei Terme gleich 1 und die anderen beiden Terme gleich 0 sein. Immer, wenn ein Term gleich 0 ist, sind die beiden darin

enthaltenen Zahlen aber gleich. Sind zwei Terme gleich 0, müssen sogar alle drei Zahlen gleich sein, dann wäre aber auch der dritte Term gleich 0.

Für die anderen Werte finden wir jeweils mögliche Belegungen für a, b und c, die diesen Wert ergeben:

- $(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2=0$,
- $(4-3)^2+(3-4)^2+(4-4)^2=2$,
- $(8-7)^2+(7-6)^2+(6-8)^2=6$ und
- $(3-1)^2+(1-3)^2+(3-3)^2=8$.

15. Die Zahl beträgt mindestens $29 \cdot 10^{98}$ (wenn alle abgedeckten Ziffern gleich 0 sind) und ist kleiner als $30 \cdot 10^{98}$ (selbst wenn alle abgedeckten Ziffern gleich 9 sind). Für die Quadrate dieser beiden Abschätzungen gilt $(29 \cdot 10^{98})^2 = 29^2 \cdot 10^{196} = 841 \cdot 10^{196}$ und $(30 \cdot 10^{98})^2 = 30^2 \cdot 10^{196} = 900 \cdot 10^{196}$. Beide diese Grenzen haben **199 Ziffern**, also auch das irgendwo dazwischen liegende tatsächliche Quadrat der Zahl.

16. Wenn man zunächst 7 benachbarte Zahlen A, B, C, D, E, F, G betrachtet und danach die Auswahl um eine Stelle verschiebt (also eine Zahl H hinzufügt und A entfernt), ergibt sich aus $A+B+C+D+E+F+G = B+C+D+E+F+G+H$, dass $A=H$ gelten muss. Dies gilt überall, also ist jede Zahl gleich groß wie die Zahl, zu der man gelangt, wenn man 7 Schritte entlang des Rades geht.

    Es zeigt sich, wenn man irgendwo beginnt und immer 7 Schritte weiter springt, erreicht man nach einigen Runden alle Zahlen am Rad. Also sind alle Zahlen gleich groß, in diesem Fall alle Zahlen gleich 10. Die Summe ist daher gleich 150, daher ist **keine der vier angegebenen Summen möglich**.

17. Die Zahlen f_1 und f_2 sind beide ungerade. Daher ist f_3 als Summe von zwei ungeraden Zahlen gerade, dann f_4 als Summe von f_2 (ungerade) und f_3 (gerade) wieder ungerade, und schließlich f_5 als Summe von f_3 (gerade) und f_4 (ungerade) ebenfalls ungerade.

    Ab hier wiederholt sich das nun immer wieder: Die Zahlen f_3, f_6, f_9, ... sind gerade, alle anderen ungerade. Von den Zahlen an den Stellen von 1 bis $2019 = 3 \cdot 673$ ist daher genau ein Drittel gerade, also 673 Zahlen. Die Zahl f_{2020} ist ungerade. Daher sind **673** der ersten 2020 Folgenglieder gerade.

18. Das kleine und das mittlere Quadrat haben Seitenlängen von 1 und 3. Die beiden gebildeten Dreiecke sind einander ähnlich (alle Seiten paarweise zueinander parallel). Da die kürzeste Seite des großen Dreiecks genau drei Mal so lang ist wie kürzeste Seite vom kleinen Dreieck, sind auch die anderen beiden Seiten jeweils drei Mal so groß wie die des kleinen Dreiecks. Das kleine Dreieck hat eine Höhe von 1 und eine Breite von 2, also hat das große eine Höhe von 3 und eine Breite von 6.

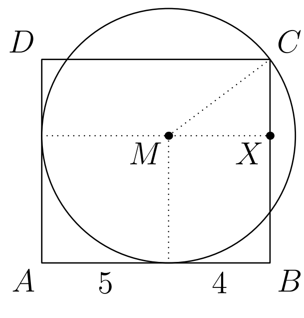
    Zeichnen wir den Lotfußpunkt von der aufliegenden Ecke des großen Quadrats auf den Boden ein, so hat das Dreieck darunter eine Höhe von $1+3=4$ und eine Breite von $2+6=8$. Die Fläche des großen Quadrats beträgt nach Satz von Pythagoras daher $4^2+8^2=$ **80**.

19. Wir zeichnen den Mittelpunkt M und einige Hilfslinien und -punkte zusätzlich ein, siehe Abbildung.

    Wir sehen aus der Entfernung zwischen A und den Berührpunkten, dass der Kreis einen Radius von 5 hat.

    Da auch MC ein Radius des Kreises ist, gilt $MC=5$. Aus Parallelverschiebung folgt $MX=4$. Im Dreieck MXC erkennen wir daher das pythagoräische Tripel $3^2+4^2=5^2$, also ist $CX=3$. (Wir können alternativ auch $CX=\sqrt{5^2-4^2}=3$ direkt ausrechnen.)

    Das Rechteck hat daher eine Höhe von 8 und eine Breite von 9, also einen Flächeninhalt von **72**.



20. Die obere Seite des linken vorderen Quaders hat eine Fläche von 21 und eine der beiden Seitenlängen beträgt 6, also ist die andere Seitenlänge gleich 3,5. Die Vorderseite dieses Quaders hat eine Fläche von 14 und dieselbe Seitenlänge von 3,5, also ist die Höhe (und damit gleichzeitig die Höhe aller Quader) gleich 4.

    Die linke Seite des hinteren Quaders hat eine Fläche von 16 und eine Höhe von 4, also beträgt auch die Breite 4. Die Oberseite hat eine Fläche von 30 und eine Seitenlänge von 4, also ist die Länge gleich 7,5.

    Vom rechten vorderen Quader hat die Oberfläche daher eine Breite von $7{,}5-3{,}5=4$ und eine Länge von 6, also beträgt die Fläche **24**.

21. Da der Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse unterhalb der x-Achse liegt, folgt sofort, dass c negativ ist. Da die Parabel nach oben offen ist, muss a positiv sein. Das Minimum der Parabel ist rechts der y-Achse, daher muss b negativ sein. Somit sind c, $b+c$, ac und ab alle negativ, und **bc positiv**.

22. Jedes Mal, wenn man auf der Gerade um 1 nach rechts geht, geht man um $1-x$ nach oben für eine recht kleine reelle Zahl x. Die Höhe des ersten schwarzen Dreiecks beträgt daher x, die Höhe des zweiten Dreiecks beträgt $2x$ und die Höhe des dritten Dreiecks beträgt $3x$. Die drei Dreiecke sind ähnlich, da ihre Seiten zueinander paarweise parallel sind. Das Verhältnis der Flächen entspricht daher dem Verhältnis der Quadrate der Seitenlängen, also $1:4:9$, das ist **keines dieser Verhältnisse**.

23. Wir berechnen zunächst die Fläche des weißen Dreiecks links oben im Verhältnis zum großen Quadrat. Die Höhe beträgt $\frac{2}{3}$ der Höhe des Quadrats und die Breite $\frac{5}{6}$ der Gesamtbreite, also ist die Fläche gleich $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$ der Gesamtfläche. Die graue Fläche macht nach Abzug der beiden weißen Dreiecke daher $1-\frac{1}{2}-\frac{5}{18}=\frac{4}{18}$ der Gesamtfläche aus.

    Wenn vier Achtzehntel der Gesamtfläche gleich $30\,\mathrm{m}^2$ sind, dann macht die gesuchte Fläche des Rechtecks, die doppelt so groß wie das zuerst berechnete Dreieck ist und somit zehn Achtzehntel beträgt, insgesamt $30\,\mathrm{m}^2 : 4\cdot 10 =$ **$75\,\mathrm{m}^2$** aus.

24. Erste Überlegung: Wenn die Zahl nicht durch 2 teilbar ist, ist sie auch nicht durch 4, 6, 8 und 10 teilbar, also können nicht wie in (A) vorgeschlagen 2 und 3 die einzigen Ausnahmen sein. Ebenso wäre eine Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist, auch nicht durch 8 teilbar, das schließt (B) aus.

    Zweite Überlegung: Eine Zahl, die durch 2 und durch 3 teilbar ist, ist (weil 2 und 3 teilerfremd sind) auch durch 6 teilbar, daher ist (C) nicht möglich. Ebenso ist eine Zahl, die durch 2 und 5 teilbar ist, auch durch 10 teilbar, was (E) ausschließt.

    Eine Zahl, für die 7 und 8 die einzigen Ausnahmen sind, finden wir tatsächlich, beispielsweise $2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Tatsächlich gibt es nur sehr wenige Möglichkeiten, was auf dem Blatt stehen kann, wenn Susanne genau zwei Zahlen aufschreibt. Wir unterscheiden Fälle nach der kleinsten aufgeschriebenen Zahl.

    Die Zahl 2 kann nicht auf dem Zettel stehen, weil gemäß obiger Überlegungen sonst schon mehr als zwei Zahlen ausgenommen wären. Ebenso kann 3 nie auf dem Zettel stehen, weil dann auch 6 und 9 dort stehen müssten, ebenfalls zu viele Ausnahmen.

    Wenn 4 auf dem Zettel steht, muss auch 8 stehen, dafür gibt es Möglichkeiten, beispielsweise $2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11$.

    Wenn 5 auf dem Zettel steht, muss auch 10 stehen, das ist ebenfalls möglich, beispielsweise für $2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11$.

    Ab jetzt betrachten wir nur noch Fälle, in denen keine Zahl kleiner als 6 auf dem Zettel steht. Somit ist die Zahl durch 2, 3, 4 und 5 teilbar, und damit auch durch 6 und 10, daher können diese beiden Zahlen nicht mehr am Zettel auftauchen.

    Es bleiben die Möglichkeiten $\{7,8\}$, $\{7,9\}$, $\{7,11\}$, $\{8,9\}$, $\{8,11\}$ und $\{9,11\}$ übrig, für die wir jeweils mögliche Zahlen N finden.

    Insgesamt gibt es daher folgende Möglichkeiten: $\{4,8\}$, $\{5,10\}$, $\{7,8\}$, $\{7,9\}$, $\{7,11\}$, $\{8,9\}$, $\{8,11\}$ und $\{9,11\}$.

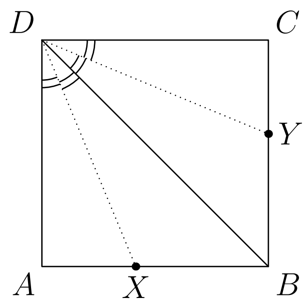
25. Es gibt $\binom{16}{2}=\frac{16\cdot 15}{1\cdot 2}=8\cdot 15$ Möglichkeiten, zwei aus 16 Sorten auszuwählen. Nun suchen wir eine Anzahl a, sodass $\binom{a}{3}=\frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ denselben Wert ergibt, also $a(a-1)(a-2)=6\cdot 8\cdot 15$. Etwas Herumprobieren liefert schnell die Lösung $a=10$ Sorten, also waren **6 Sorten ausverkauft**.

26. In jedem Zug kann er $5\cdot 6$ Murmeln herausnehmen oder $3\cdot 6$ Murmeln hinzufügen, also bleibt der Rest bei Division durch 6 immer gleich. Zu Beginn hat er $71=11\cdot 6+5$ Murmeln, also kann er nie weniger als 5 haben.

    Tatsächlich ist 5 erreichbar: Indem er zuerst drei Mal 18 Murmeln hinzufügt und dann zwei Mal 30 Murmeln entfernt, kann er die Anzahl um 6 verringern. Wiederholt er das oft genug, erreicht er irgendwann **5 Murmeln**.

27. Wir bezeichnen einige Punkte wie in der Abbildung zu sehen.

Die Winkelsymmetrale teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten, also gilt $AX : XB = 1 : \sqrt{2}$. Für die Länge XB gilt daher



$$\begin{aligned} XB &= \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-2}{1-2} \\ &= 2-\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Die Fläche von XBD beträgt (berechnet als „Grundlinie mal Höhe Halbe") daher $(2-\sqrt{2}) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$, und die gesuchte Fläche ist wegen der Symmetrie doppelt so groß, also $\mathbf{2-\sqrt{2}}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Die Fläche von $DAX + DCY$ beträgt $2 \cdot \frac{DA \cdot AX}{2} = AX$ (wegen Symmetrie und wegen $DA = 1$), und es gilt $AX = \tan(22{,}5°)$. Wir wissen, dass $\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, und aus dem Halbwinkelsatz folgt

$$\tan(22{,}5°) = \frac{1-\cos(45°)}{\sin(45°)} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1,$$

daher gilt für die gesuchte Fläche $DXBY = 1 - DAX - DCY = 1 - (\sqrt{2}-1) = \mathbf{2-\sqrt{2}}$.

28. Wir betrachten das aus dem Wasser ragende Stück als Pyramide, wobei die Seiten mit 24 m und 25 m die Grundfläche aufspannen und die Seite mit 27 m die Höhe bildet. Die Grundfläche beträgt somit (laut Flächenformel für ein rechtwinkeliges Dreieck) $\frac{24\text{m}\cdot 25\text{m}}{2} = (12 \cdot 25)\text{m}^2$, und das Volumen (laut Volumenformel für die Pyramide) $\frac{(12\cdot 25)\text{m}^2 \cdot 27\text{m}}{3} = (12 \cdot 25 \cdot 9)\text{m}^3$.

Dies sind nur 10%, daher hat der ganze Eisberg ein Volumen von $10 \cdot (12 \cdot 25 \cdot 9)\text{m}^3 = (2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3)\text{m}^3$, und somit eine Seitenlänge von $(2 \cdot 3 \cdot 5)\text{m} = \mathbf{30\,m}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Man beobachte, wie wir immer nur das kürzen oder ausmultiplizeren, was gerade leicht im Kopf geht, und uns damit das Ausrechnen vieler großer Zahlen ersparen.

29. Wir zählen zunächst die Vielfachheit des Primfaktors p_2 auf jedem Ziegel. Dabei halten wir zunächst fest, dass die Vielfachheit jeweils der Summe der Vielfachheiten auf den beiden darunterliegenden Ziegeln entspricht.

8								
7	1							
6	1	0						
5	1	0	0					
4	1	0	0	0				
3	1	0	0	0	0			
2	1	0	0	0	0	0		
1	1	0	0	0	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	0	0	0

In der untersten Reihe enthält nur der zweite Ziegel von links genau einen Faktor p_2. In der zweiten Zeile von unten enthalten der erste und zweite Ziegel von links jeweils einen Faktor p_2. In der dritten Zeile enthält der erste, der auf beiden darunterliegenden aufliegt, $1+1 = 2$ Faktoren p_2, der zweite Ziegel einen

Faktor p_2, und der Rest keinen. In der vierten Zeile enthält der linkeste Ziegel $2 + 1 = 3$ Faktoren p_2, der zweite Ziegel einen Faktor p_2, und der Rest keinen. Dies setzt sich fort: In Zeile k enthält der erste Ziegel $k - 1$ Faktoren p_2, der zweite Ziegen einen Faktor p_2, und der Rest keinen.

Wenn im obersten Ziegel genau 8 Faktoren p_2 enthalten sind, hat die Pyramide daher genau 9 Reihen.

Durch p_4 teilbar sind genau jene Ziegel, die in dem Rechteck liegen, wenn man vom Ziegel p_4 in der untersten Reihe zuerst schräg nach links oben bis zum Rand, und von dort dem Rand entlang bis zur Spitze geht, bzw. vom Ziegel p_4 in der untersten Reihe schräg nach rechts oben bis zum Rand und von dem Rand entlang bis zur Spitze. Dieses Rechteck ist, wenn man die Ziegel auf dem ersten dieser beiden Wege zählt, 4 Ziegel breit und 6 Ziegel hoch, enthält also **24 Ziegel**.

30. Adam kennt die Farbe. Wenn die Farbe weiß wäre, könnte es aus seiner Sicht sein, dass die Form das Sechseck ist, und dann könnte Britt bereits alles wissen, da es nur ein einziges Sechseck gibt. Daraus, dass Adam sich sicher ist, dass Britt noch nicht die Lieblingsfigur kennt, können wir nach der ersten Aussage schließen, dass die Farbe *nicht* weiß ist.

    Dies schließt auch Britt und weiß nun, dass die Farbe grau oder schwarz ist. Diese Information hilft ihr offensichtlich weiter, wie wir aus ihrer Aussage schließen können. Wäre die Form der Kreis gewesen, dann wäre sie immer noch unentschlossen, ob es der graue oder der schwarze Kreis ist. Also ist die Form entweder der Stern, oder das Dreieck, oder das Quadrat. In allen drei Fällen kann sie aus der Information, dass die Farbe nicht weiß ist, die genaue Figur schließen.

    Somit erfahren wir und Adam aus dieser Aussage, dass es eine dieser drei Formen sein muss. Diese Information wiederum scheint Adam geholfen zu haben. Wäre die Farbe schwarz, dann wäre er jetzt immer noch unentschlossen zwischen dem schwarzen Stern oder dem schwarzen Quadrat. Da Adam die Figur nun aber mit Sicherheit sagen kann, muss die Farbe grau und die Figur somit das **graue Dreieck** sein.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Wenn wir mit diesem Wissen unsere Überlegungen noch einmal überprüfen, sehen wir: Adam hat von Carl erfahren, dass die Farbe grau ist, also kann es aus seiner Sicht noch das graue Dreieck oder der graue Kreis sein, und er weiß somit, dass Britt entweder „Dreieck“ oder „Kreis“ genannt bekommen hat. In beiden Fällen kennt sie die genaue Figur noch nicht.

    Britt erfährt zu Beginn von Carl, dass die Figur ein Dreieck ist, also schwankt sie noch zwischen weißem und grauem Dreieck und weiß daher, dass Adam entweder „weiß“ oder „grau“ genannt bekommen hat.

    Britt schließt aus Adams erster Aussage wie oben beschrieben, dass es nicht weiß ist, und kennt nun die genaue Figur. Adam kann daraus, dass die Farbinformation nützlich war, schließen, dass es nicht der Kreis ist, und kennt nun ebenfalls alles.