# Känguru 2019 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Die lange Seite des schwarzen Rechtecks ist gleich lang wie die breiten Seiten der beiden anderen Rechtecke. Da die drei Rechtecke gleich groß sind, ist das Verhältnis von Breite zu Länge daher **1 : 2**.

2. Die Summe 4 kann nur als $1 + 3$ erreicht werden (weil wir für $2 + 2$ den 2er doppelt verwenden müssten), daher enthält eine Zeile oder eine Spalte die beiden Zahlen 1 und 3. Da Zeilen und Spalten beliebig vertauscht werden können, dürfen wir annehmen, dass dies die erste Zeile ist, und dass links oben 1 und rechts oben 3 steht.

   In der zweiten Zeile müssen also 2 und 4 in irgendeiner Reihenfolge stehen, somit hat die zweite Zeile sicher die Summe 6.
   Falls links unten 2 und rechts unten 4 steht, dann sind die Spaltensummen gleich 3 und 7, also fehlt die aus der Angabe bekannte Summe 5. Daher muss umgekehrt links unten 4 und rechts unten 2 stehen, also sind die Spaltensummen gleich 5 und 5.
   Somit sind die übrigen beiden Summen **5 und 6**.

   | | |
   |---|---|
   | 1 | 3 |
   | 4 | 2 |

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Alternativ kommen wir mit einem „Trick“ viel schneller ans Ziel: Die Summe aller 4 Zahlen ist 10, daher muss die Summe der beiden Zeilensummen gleich 10 sein und ebenso die Summe der beiden Spaltensummen. Wenn es also irgendwo eine Zeile (oder Spalte) mit Summe 4 gibt, muss die andere Zeile (oder Spalte) die Summe $10 - 4 = 6$ haben. Ebenso, wenn eine Zeilen- oder Spaltensumme gleich 5 ist, muss die zweite $10 - 5 = 5$ sein. Daher fehlen die Summen **5 und 6**.

3. Wir nutzen hier, dass die Fläche eines Dreiecks sich als $\frac{\text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}}{2}$ berechnet. Insbesondere folgt daraus, wenn mehrere Dreiecke dieselbe Höhe haben, dann kann man die Summe ihrer Flächen als

   $$\frac{\text{Summe der Grundlinien} \cdot \text{gemeinsame Höhe}}{2}$$

   berechnen.

   Bezeichne $l$ die längere und $b$ die kürzere Seite der Rechtecke.

   - In (A) ist die Fläche $\frac{l \cdot b}{2}$.
   - In (B) ist die Summe der Grundlinien gleich $b$ und die Höhe $l$, also ist die Fläche gleich $\frac{b \cdot l}{2}$.
   - In (C) ist die Summe der Grundlinien gleich $l$ und die Höhe $b$, also ist die Fläche gleich $\frac{l \cdot b}{2}$.
   - In (D) ist die Summe der Grundlinien weniger als $l$ und die Höhe $b$, also ist die Fläche weniger als $\frac{l \cdot b}{2}$.
   - In (E) zerschneiden wir das Rechteck entlang einer Diagonale und lassen vorläufig eine Hälfte weg, sodass wir wieder lauter Dreiecke mit Spitze oben haben. Die Summe der Grundlinien dieser Dreiecke ist gleich $l$ und die Höhe $b$, also ist die Fläche gleich $\frac{l \cdot b}{2}$. Dazu kommt noch die Fläche des weggelassenen halben Rechtecks.

   Daher hat **(E)** den größten grauen Bereich.

4. Wir sehen, dass das graue mit dem weißen Dreieck verbunden ist und das weiße mit dem schwarzen, nicht aber das graue mit dem schwarzen.

   - In (A) ist jedes Dreieck mit jedem verbunden.
   - In (B) ist das graue Dreieck mit gar keinem Dreieck verbunden.
   - In (C) sind gar keine Dreiecke miteinander verbunden.
   - **In (D) sind die gleichen Dreiecke miteinander verbunden wie in der Vorlage.**
   - In (E) ist jedes Dreieck mit jedem verbunden.

5. Die Pyramide hat 23 Kanten zwischen benachbarten Seitenflächen und zusätzlich die 23 Kanten des unteren 23-Ecks, insgesamt also **46** Kanten.

6. Wir schreiben die Zahlen zunächst als Summe untereinander und ersetzen fehlende Ziffern durch Variablen, siehe Abbildung rechts.
Die Summe der Einerziffern ist 16, also schreibe 6, Übertrag 1.
Die Summe der Zehnerziffern plus Übertrag ist $4 + x + 2 + 1 = 7 + x$. Die letzte Stelle dieses Ergebnisses muss 2 sein, also folgt $x = 5$, und Übertrag ist 1.

$$\begin{array}{r} 7243 \\ 21x7 \\ zy26 \\ \hline 11126 \end{array}$$

   Die Summe der Hunderterziffern plus Übertrag ist $2 + 1 + y + 1 = 4 + y$. Die letzte Stelle davon soll 1 sein, also erhalten wir $y = 7$ und Übertrag 1.

   Die Summe der Tausenderziffern plus Übertrag schließlich ist $7 + 2 + z + 1 = 10 + z$ und soll gleich 11 sein, daher folgt $z = 1$.

   Die drei Ziffern sind daher **1, 5 und 7**.

7. Um eine möglichst kleine Zahl zu erhalten, wollen wir in erster Linie möglichst wenige Ziffern, und da die Ziffernsumme vorgegeben ist, erreichen wir das, indem wir möglichst große Ziffern verwenden. Andererseits möchten wir die großen Ziffern möglichst weit hinten. Wir beginnen daher von der Einerstelle mit 9ern aufzufüllen, bis wir 224 Ziffern 9 und damit eine Summe von 2016 haben. Nun fügen wir noch eine **führende Ziffer 3** hinzu.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Ganz mathematisch korrekt können wir jetzt noch kurz argumentieren, dass es sicher nicht besser geht: Weniger Ziffern sind nicht möglich, da mit 224 Ziffern die maximale Ziffernsumme nur 2016 wäre. Mehr Ziffern machen die Zahl größer. Und bei genau gleich vielen Ziffern ist es nicht möglich, die führende Ziffer 3 kleiner zu machen, da wir zu keiner anderen Ziffer mehr etwas hinzufügen können, um dieselbe Ziffernsumme zu erreichen.

8. Die ersten Vielfachen von $2^{10}$ sind $1 \cdot 2^{10}$, $2 \cdot 2^{10}$, $3 \cdot 2^{10}$, $4 \cdot 2^{10}$, und so weiter. Es gilt $2^{13} = 2^3 \cdot 2^{10} = 8 \cdot 2^{10}$. Daher sind **8 Vielfache** von $2^{10}$ im betrachteten Bereich.

9. Es sind also drei Seiten mit 1 markiert, zwei Seiten mit 2 und eine Seite mit 3. Das ist bei **Würfel (C)** nicht möglich, da wir dort zwei Seiten mit 3 Punkten sehen. Alle anderen Würfel erfüllen diese Einschränkungen.

10. Carl trägt laut Angabe keinen Hut.

    Würde Bob keinen Hut tragen, müsste Carl einen Hut tragen. Da dies nicht der Fall ist, trägt Bob sicher einen Hut.

    Ob Alex einen Hut trägt, können wir nicht sagen; sowohl, wenn er einen trägt, als auch, wenn er keinen trägt, sind alle uns bekannten Bedingungen erfüllt.

    Wir können daher **nur über Bob** mit Sicherheit sagen, dass er einen Hut trägt.

11. Wir können 7! herausziehen und erhalten $7! + 8! + 9! = 7! \cdot (1 + 8 + 8 \cdot 9) = 7! \cdot 81$. In $81 = 3^4$ sind vier 3er enthalten. Von den Faktoren von 7! enthalten 3 und 6 jeweils genau einen 3er, die restlichen sind nicht durch 3 teilbar. Insgesamt ist $\mathbf{3^6}$ daher die höchste enthaltene Dreierpotenz.

12. Wir bezeichnen mit $m$ und $b$ die Anzahl der Mädchen bzw. Burschen im vorigen Jahr, und mit $M$ und $B$ die Anzahlen im heurigen Jahr. Es gilt $M + B = m + b + 1$, $M = m \cdot 0.8$ und $B = b \cdot 1.2$. Wir setzen die letzten beiden Gleichungen in die erste ein und erhalten

$$\begin{aligned} & m \cdot 0.8 + b \cdot 1.2 = m + b + 1 \\ \iff\quad & 8m + 12b = 10m + 10b + 10 \\ \iff\quad & 2b = 2m + 10 \\ \iff\quad & b = m + 5. \end{aligned}$$

    Die Anzahl der Burschen muss im Vorjahr also um 5 größer gewesen sein als die Anzahl der Mädchen. Darüber hinaus müssen im Vorjahr sowohl die Anzahl der Mädchen als auch Burschen durch 5 teilbar gewesen sein, damit die Anzahlen heuer wieder ganzzahlig sind. Es gilt also $m = 5x$ und $b = m + 5 = 5x + 5 = 5 \cdot (x + 1)$ für eine passende positive ganze Zahl $x$.

    Die Anzahl heuer ist daher $M + B = 5x \cdot 0.8 + 5(x + 1) \cdot 1.2 = 4x + 6(x + 1) = 10x + 6$. Möglich ist daher jede Anzahl mit Einerziffer 6, von den zur Verfügung stehenden Auswahlmöglichkeiten also **26**.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Drei der fünf Antwortmöglichkeiten kann man bereits nur mit dem zweiten Teil der Überlegung ausschließen: Im Vorjahr müssen die Anzahlen durch 5 teilbar gewesen sein, damit die heurigen Anzahlen ganzzahlig sind. Daher muss auch die Gesamtzahl durch 5 teilbar gewesen sein. Heuer ist die Gesamtzahl um 1 höher, daher muss die Einerziffer gleich 1 oder 6 sein.

Auch die Überlegung, dass die Anzahl der Burschen um 5 größer gewesen sein muss, bekommt man statt über den formellastigen Ansatz auch argumentativ heraus: Pro 5er-Gruppe Mädchen wird die Anzahl der Personen im nächsten Jahr um 1 niedriger, pro 5er-Gruppe Burschen um 1 höher. Daher gibt es eine 5er-Gruppe Burschen mehr als Mädchen. Insgesamt gibt es daher eine ungerade Anzahl von 5er-Gruppen, und im Jahr darauf eine Person mehr, daher ist die Einerstelle gleich 6.

13. Wir bezeichnen die kürzeste, mittlere und längste Seite mit $b$ (Breite), $l$ (Länge) bzw. $h$ (Höhe), und verwenden überall Meter als Einheit. Wenn wir die ersten beiden Skizzen vergleichen, sehen wir, dass das Wasser in beiden die volle Höhe $h$ einnimmt. Da das Volumen gleich Grundfläche mal Höhe ist, sind daher auch die Grundflächen gleich, also gilt $2 \cdot l = 3 \cdot b$, folglich $l : b = 3 : 2$. Auf dieselbe Art erhalten wir im Vergleich zwischen zweiter und dritter Skizze, wo das Wasser beide Male die volle Breite einnimmt, dass $h : l = 5 : 3$. Schließlich erhalten wir aus dem Vergleich von erster und dritter Skizze, wo das Wasser beide Male die volle Länge ausfüllt, dass $b : h = 2 : 5$. Letzteres hätten wir auch einfach aus Kombination der ersten beiden Verhältniss erhalten können.

   Insgesamt gilt also $b = 2x$, $l = 3x$ und $h = 5x$ für eine passende Länge $x$. Aus dem Wasservolumen im ersten Bild erhalten wir $120 = 2 \cdot 3x \cdot 5x = 30x^2$, also $4 = x^2$ und somit $x = 2$. Das gesamte Volumen ist daher gleich $2x \cdot 3x \cdot 5x = 30 \cdot 2^3 = \mathbf{240}\mathrm{m}^3$.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Für diese Aufgabe gibt es eine ebenso schöne alternative Herangehensweise, bei der wir uns zunutze machen, dass wir uns nicht für die einzelnen Seitenlängen interessieren, sondern nur für deren Produkt: Dasselbe Wasservolumen kann man in der ersten Skizze berechnen als $120 = 2 \cdot l \cdot h$, in der zweiten als $120 = b \cdot 3 \cdot h$ und in der dritten als $120 = b \cdot l \cdot 5$. Multipliziert man diese drei Gleichungen miteinander, so erhält man $120^3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot b^2 \cdot l^2 \cdot h^2$, und somit für das gewünschte Volumen

$$b \cdot l \cdot h = \sqrt{\frac{120^3}{2 \cdot 3 \cdot 5}} = \sqrt{120^2 \cdot 4} = 120 \cdot 2 = \mathbf{240}\mathrm{m}^3.$$

14. Nach Definition gilt $(a\Diamond b)\Diamond c = c-(a\Diamond b) = c-(b-a) = a-b+c$, und $a\Diamond(b\Diamond c) = a\Diamond(c-b) = (c-b)-a = -a-b+c$. Wenn die beiden gleich sein sollen, muss somit $a-b+c = -a-b+c$ gelten, also $-a = a$. Das ist nur für $\mathbf{a = 0}$ erfüllt.

15. Nach dem Ziehen wird die mittlere Rolle um ein Stück höher hängen, und der rechte und mittlere Abschnitt von Seil 1 (also jener Abschnitt von der Befestigung an der Decke bis zur mittleren Rolle, sowie jener Abschnitt zwischen den beiden Rollen) werden beide um dieses Stück kürzer. Da diese beiden Abschnitte zusammen um 24cm kürzer werden (und der linke Abschnitt um dieses Stück länger), wird jeder davon um 12cm kürzer also hängt die mittlere Rolle danach um 12cm höher.

   Die Situation bei Seil 2 ist ganz gleich (wenn wir die beiden Abschnitte von der Decke bis zur Rolle und von der Rolle bis zur *ursprüngliche* Position der mittleren Rolle betrachten; die feste ursprüngliche Position spielt hier also dieselbe Rolle wie zuvor die fest an der Decke montierte linke Rolle). Somit halbiert der Abstand sich ein weiteres Mal. Wenn die mittlere Rolle sich um 12cm nach oben bewegt, dann bewegt die rechte Rolle mit Punkt $Q$ sich daher um **6**cm nach oben.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Dieses Prinzip entspricht einem Flaschenzug. Da physikalisch betrachtet Arbeit sich als „Kraft mal Weg“ berechnet, können wir durch das Verdoppeln des Weges die benötigte Kraft halbieren. Diese konkreten Konstruktion vervierfacht den Weg: Eine Bewegung um $x$ nach unten bei $P$ bewirkt eine Bewegung um $\frac{x}{4}$ bei $Q$ nach oben. Würde man also eine schwere Kiste an $Q$ befestigen und an $P$ anziehen, so benötigt man zum Hochheben der Kiste also nur ein Viertel der Kraft, die man beim direkten Heben benötigen würde.

16. Der größte Teiler ist mindestens 1, daher ist $n$ mindestens 7. Wir unterscheiden Fälle nach dem kleinsten Primfaktor $p$ von $n$. Der größte Teiler (außer $n$ selbst) ist gleich $n$ dividiert durch den kleinsten Primfaktor, also $n-6 = \frac{n}{p}$, das ist äquivalent zu $p \cdot (n-6) = n$, was wir weiter umformen zu $p \cdot n - 6p = n$ und damit $(p-1) \cdot n = 6p$ und schließlich

$$n = \frac{6p}{p-1} = \frac{6p-6+6}{p-1} = 6 + \frac{6}{p-1}.$$

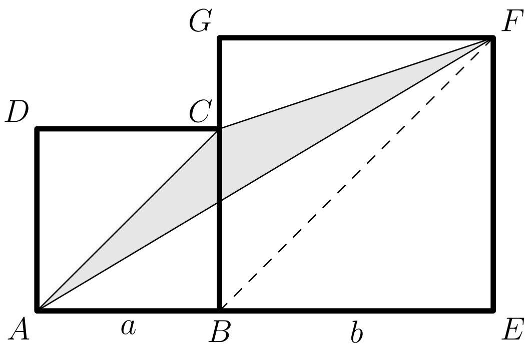
   - Für $p = 2$ erhalten wir $n = 6 + \frac{6}{1} = 12$, dies ist eine Lösung.

- Für $p = 3$ erhalten wir $n = 6 + \frac{6}{2} = 9$, dies ist eine Lösung.
- Für $p = 5$ erhalten wir $n = 6 + \frac{6}{4} = 7.5$, das ist keine ganze Zahl.
- Für $p = 7$ erhalten wir $n = 6 + \frac{6}{6} = 7$, das ist eine Lösung.
- Für $p \geq 11$ erhalten wir $n = 6 + \frac{6}{p-1} < 7$, also ist $n - 6 < 1$ und damit kein Teiler von $n$.

Insgesamt haben wir daher die **3 Lösungen** 7, 9 und 12 gefunden.

17. Die Wahrscheinlichkeit, ob die Kugel mit dem Fruchtbonbon an der ersten, zweiten, dritten, vierten oder fünften Stelle gezogen wird, ist genau gleich, nämlich jeweils ein Fünftel. Maria zieht die zweite und vierte Kugel, ihre Gewinnchance ist daher $\mathbf{\frac{2}{5}}$.

18. Im Folgenden bezeichne $[XYZ]$ jeweils die Fläche eines Dreiecks $XYZ$, sowie $[PQRS]$ die Fläche eines Vierecks $PQRS$. Wir bezeichnen die Ecken wie in der Skizze zu sehen. Weiters sei $a$ die Seitenlänge des kleineren und $b$ jene des größeren Quadrats.




Dann lässt die graue Fläche sich berechnen als

$$\begin{aligned}
\text{grau} &= [ABCD] + [BEFG] - [ACD] - [AEF] - [CFG] \\
&= a^2 + b^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{(a+b)\cdot b}{2} - \frac{(b-a)\cdot b}{2} \\
&= \frac{a^2}{2} + b^2 - \frac{ab + b^2 + b^2 - ab}{2} \\
&= \frac{a^2}{2} + b^2 - b^2 \\
&= \mathbf{\frac{a^2}{2}}.
\end{aligned}$$

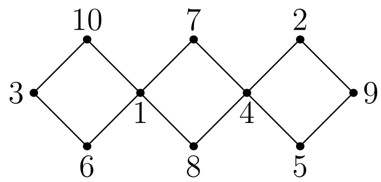
Alternativlösungen und Anmerkungen:

Wenn wir diese überraschend einfache Formel einmal gesehen haben, fragen wir uns natürlich, ob man das nicht viel einfacher auch hätte sehen können. Tatsächlich liegt es nun nahe, die Diagonale $BF$ einzuzeichnen. Da die beiden Diagonalen $AC$ und $BF$ zueinander parallel sind, haben die beiden Dreiecke $ACB$ und $ACF$ (mit der gemeinsamen Grundlinie $AC$) dieselbe Höhe, und daher folgt sofort $[ACF] = [ACB] = \frac{a^2}{2}$.

19. Die Zahl $\sqrt{20}$ ist größer als 4 (wegen $20 > 16$) und kleiner als 5 (wegen $20 < 25$). Folglich ist $16 < 20 + \sqrt{20} < 25$, und die Wurzel daraus liegt wieder zwischen 4 und 5. Dies setzt sich nun fort: Wenn $4 < x < 5$ gilt, dann ist $16 < 20 + x < 25$ und die Wurzel daraus folglich wieder $4 < \sqrt{20 + x} < 5$. Die größte ganze Zahl kleiner als eine solche Wurzel (unabhängig von der genauen Anzahl der verschachtelten Wurzeln) ist daher **4**.

20. Wenn wir die Summen der drei Quadrate zusammenzählen, werden die „äußeren“ Punkte jeweils einfach gezählt und die zwei mittleren Punkte doppelt. Insgesamt setzt diese Summe sich daher zusammen aus der Summe der Zahlen von 1 bis 10 plus den zwei doppelt gezählten Zahlen, und ist somit (wenn wir die beiden kleinstmöglichen Zahlen verdoppeln) mindestens $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 + 1 + 2 = 58$. Andererseits muss diese Summe gleich $3S$ sein, also durch 3 teilbar. Da 58 und 59 das nicht erfüllen, ist 60 die kleinste zumindest theoretisch mögliche Gesamtsumme; in diesem Fall wäre $S = 20$.

    Tatsächlich finden wir für $S = 20$ eine mögliche Anordnung wie unten abgebildet, daher ist **20** tatsächlich der kleinste mögliche Wert von $S$.




21. Die Teiler von $1024 = 2^{10}$ sind $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{10}$. Für ihr Produkt gilt demnach

$$b = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \cdots \cdot 2^{10} = 2^{0+1+2+3+\cdots+10} = 2^{55},$$

und für ihre Summe nach geometrischer Summenformel

$$a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10} = 2^{11} - 1.$$

Folglich gilt $\mathbf{(a+1)^5} = 2^{55} \mathbf{= b}$.

22. Für $x \geq 0$ können wir das umformen zu $2 - x = ax$, also $x = \frac{2}{a+1}$. Für $a < -1$ wäre $x$ entgegen der Voraussetzung negativ, für $a = -1$ hätten wir eine Division durch 0 (das heißt, wir hätten die Umformung gar nicht machen dürfen, sehen aber in der ursprünglichen Gleichung sofort, dass $2 - x = -x$, also $2 = 0$, keine Lösung hat), und für $a > -1$ erhalten wir genau eine Lösung.

Für $x < 0$ erhalten wir stattdessen $2 + x = ax$, also $x = \frac{2}{a-1}$. Für $a > 1$ wäre $x$ positiv, für $a = 1$ erhalten wir wie zuvor keine Lösung wegen $2 = 0$, und für $a < 1$ erhalten wir genau eine Lösung.

Damit die Gleichung genau zwei Lösungen besitzt, müssen also beide Möglichkeiten genau eine Lösung produzieren. Das trifft im Bereich $-1 < a < 1$ (in Intervallschreibeweise $\mathbf{]-1; 1[}$) zu.

23. Es gilt also $a + \frac{b}{c} = 11$ und $b + \frac{a}{c} = 14$. Multiplizieren wir beide Gleichungen mit $c$, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$ac + b = 11c, \tag{I}$$
$$bc + a = 14c. \tag{II}$$

Subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten, so erhalten wir (II) − (I) $= (b - a) \cdot c + a - b = 3c$, was wir weiter umformen können zu

$$(b - a) \cdot (c - 1) = 3c. \tag{III}$$

Insbesondere muss also $c - 1$ ein Teiler von $3c$ sein. Da aufeinanderfolgende Zahlen $c - 1$ und $c$ immer teilerfremd sein, muss $c - 1$ ein Teiler von 3 sein.

Wir haben also zwei Fälle zu betrachten:

- Sei $c - 1 = 1$, also $c = 2$. Aus (III) folgt $b - a = 6$, also $b = a + 6$. Setzen wir das in (I) ein, so erhalten wir $2a + a + 6 = 22$, also $3a = 16$, somit $a = \frac{16}{3}$ und $b = a + 6 = \frac{34}{3}$. Zwar erfüllt das tatsächlich die beiden Gleichungen, allerdings sind $a$ und $b$ hier keine ganzen Zahlen.
- Sei $c - 1 = 3$, also $c = 4$. Aus (III) folgt $(b - a) \cdot 3 = 12$, also $b = a + 4$. Setzen wir das in (I) ein, so erhalten wir $4a + a + 4 = 44$, also $5a = 40$, somit $a = 8$ und $b = 12$. Tatsächlich ist das die einzige Lösung in ganzen Zahlen, wie wir durch Einsetzen in die ursprünglichen Gleichungen leicht überprüfen.

Somit folgt $\frac{a+b}{c} = \frac{8+12}{4} = \mathbf{5}$.

24. Wir unterscheiden verschiedene „Arten“ solcher Ebenen nach der Anzahl der Punkte aus derselben Seitenfläche, die sie enthalten.

- Ebenen, die 4 Punkte einer Seitenfläche enthalten, existieren 6 Stück, eine pro Seitenfläche.
- Ebenen, die 3 Punkte einer Seitenfläche enthalten, enthalten automatisch auch den vierten und wurden daher bereits im vorigen Schritt gezählt.
- Betrachten wir nun Ebenen, die zwei benachbarte Punkte einer Seitenfläche enthalten. Da die Ebene einen dritten Eckpunkt des Würfels enthalten muss, aber keinen Punkt auf derselben Seitenfläche wie die beiden schon enthaltenen Punkte enthalten darf, kommt nur die Kante „diagonal gegenüber“ in Frage (also zum Beispiel von vorne betrachtet die beiden linken oberen und die beiden rechten unteren Eckpunkte). Der Würfel hat 12 Kanten, die jeweils in Paaren einander gegenüber liegen, also finden wir 6 solche Ebenen.

- Nun betrachten wir Ebenen, die zwei gegenüberliegende Punkte einer Seitenfläche enthalten, beispielsweise oben links vorne und oben rechts hinten. Vier der restlichen Eckpunkte können nicht in der Ebene liegen, da wir sonst einen der vorigen Fälle vorliegen hätten, für die restlichen beiden ist es möglich. Wir suchen also Ebenen, die durch die drei Nachbarn desselben Eckpunktes gehen. Da es 8 Eckpunkte gibt, gibt es 8 solche Flächen.
- Es gibt keine solchen Ebenen, die von jeder Seitenfläche nur einen Punkt beinhalten, da jeder Eckpunkt an 3 Seitenflächen angrenzt, und der Würfel somit 9 Seiten haben müsste, damit jeder Eckpunkt in der Ebene zu anderen Seitenflächen gehört.

Insgesamt haben wir daher $6 + 6 + 8 = \mathbf{20}$ solche Ebenen gefunden.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Alternativ (und um zu überprüfen, dass wir nichts vergessen haben) können wir auch von der anderen Richtung zu zählen beginnen. Es gibt $\binom{8}{3} = 56$ Möglichkeiten, 3 Eckpunkte des Würfels auszuwählen. Nun haben wir aber jede Ebene, die vier Eckpunkte enthält, vierfach gezählt. Vier Eckpunkte enthalten sind in den Ebenen, die eine Seitenfläche enthalten, davon gibt es 6, und in jenen, die zwei „gegenüberliegende“ Kanten beinhalten, davon gibt es wie oben betrachtet ebenfalls 6. Wir haben also 12 Ebenen jeweils vierfach gezählt, müssen daher $12 \cdot 3 = 36$ Ebenen abziehen. Es bleiben $56 - 36 = 20$ Ebenen übrig.

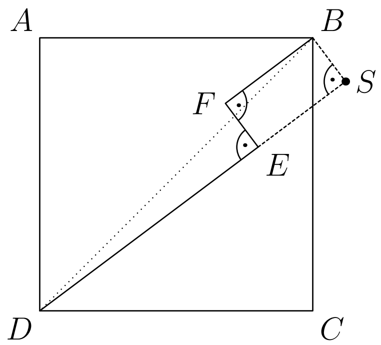
25. Eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht, hat die Gleichung $y = ax$ für eine passende reelle Zahl $a$. Die Schnittpunkte mit der Parabel erhalten wir durch das Lösen der Gleichung $x^2 - 2 = ax$, also $x^2 - ax - 2 = 0$. Da wir uns nur für das Produkt der beiden Lösungen für die $x$-Werte interessieren, erhalten wir aus dem Satz von Vieta sofort $x_1 \cdot x_2 = -2$.

    Multipliziert man die $x$-Koordinaten der Schnittpunkte vier solcher Geraden miteinander, so erhält man daher jedenfalls $(-2)^4 = \mathbf{16}$.

26. Mit etwas Übung erkennt man sofort die Faktorisierung $|n^2 - 2n - 3| = |(n-3)(n+1)|$. Damit das Produkt eine Primzahl ist, muss also einer der Faktoren gleich 1 oder $-1$ sein. Dies führt zu den Fällen $n \in \{-2, 0, 2, 4\}$, von denen wir leicht ausrechnen, dass sie die Werte 5, 3, 3 bzw. 5 ergeben, also alle **vier** Lösungen sind.

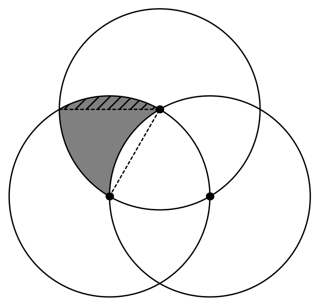
27. Wir verlängern $DE$ und zeichnen eine Parallele zu $EF$ durch $B$ wie abgebildet. Sei $S$ der Schnittpunkt dieser beiden neuen Geraden. Da $EFBS$ wegen der Parallelität ein Rechteck ist, ist $BS = FE$ und $ES = FB$.
    Im rechtwinkeligen Dreieck $DSB$ gilt nach Pythagoras $DB^2 = DS^2 + BS^2 = (5+2)^2 + 1^2 = 50$.
    Bekanntlich gilt im Quadrat $DB = AB \cdot \sqrt{2}$, also umgekehrt

$$AB = \frac{DB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{25} = \mathbf{5}.$$




28. Ausprobieren der ersten Werte liefert $a_1 = 49$, $a_2 = 196$, $a_3 = 289$, $a_4 = 400$, $a_5 = 25$, $a_6 = 64$, $a_7 = 121$, $a_8 = 25$. Da jeder Wert nur vom vorigen abhängt und 25 bereits vorgekommen ist, wird die Folge sich nun immer wieder wiederholen und zwar zwischen den 3 Werten 25, 64 und 121. Es gilt also $a_{2019} = a_{2016} = a_{2013} = \cdots = a_9 = a_6 = \mathbf{64}$.

29. Wir berechnen die Fläche von einem der drei grauen Teile, indem wir den schraffierten Teil „abschneiden“ und unten wieder anfügen, sodass wir als graue Fläche einen Kreissektor mit Innenwinkel 60° erhalten. Insgesamt haben wir drei solche Sektoren, deren Flächen in Summe daher einen halben Kreis ausmachen, also $r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = 2^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{2\pi}$.



30. Die Gesamtsumme jeder Zeile ist 15, die Gesamtsumme aller Zeilen somit 75. Daher muss die Summe in jedem der drei Bereich gleich 25 sein.

Die größtmöglichen Zahlen, die man im linken unteren Bereich unterbringen kann, sind drei 5er (da pro Spalte nur einer erlaubt ist), zwei 4er und der schon vorhandene 2er, das ergibt in Summe 25. Jede andere Möglichkeit hätte eine geringere Summe, daher gibt es hier keine andere Möglichkeit.

Auch im rechten oberen Bereich brauchen wir die Summe 25. Um die größtmögliche Summe zu erreichen, können wir maximal zwei 5er verwenden (da drei der 5er bereits verbraucht sind) und maximal drei 4er (höchstens einer pro Spalte), sowie einen 3er. Das ergibt Summe 25. Auch hier hätte jede andere Möglichkeit eine zu geringe Summe. Daher ist die Zahl rechts oben gleich **3**.