Känguru 2018 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Da der 2. Tag ein Donnerstag ist, müssen auch der 9., 16. und 23. ein Donnerstag sein. (Mathematisch gesprochen: Alle Tage mit Rest 2 bei Division durch 7, also „kongruent 2 modulo 7“.) Dann ist der 24. ein Freitag, 25. Samstag, 26. Sonntag und **27. ein Montag**.

2.
$$
\begin{aligned}
&2 - 0 \cdot 1 + 8 = 2 - 0 + 8 = 10 \\
&2 + 0 \cdot 1 \cdot 8 = 2 + 0 = 2 \\
&2 \cdot 0 + 1 \cdot 8 = 0 + 8 = 8 \\
&\mathbf{2 \cdot (0 + 1 + 8) = 2 \cdot 9 = 18} \\
&2 \cdot 0 + 1 + 8 = 0 + 1 + 8 = 9
\end{aligned}
$$

3. Von der Terrasse kann sie nur nach Raum 4 gehen, von dort nur nach Raum 1, und von dort wieder nur nach Raum 2. Nun gibt es zwei Möglichkeiten, wobei noch 3 Türen zu durchschreiten sind. Entweder sie geht nach 5, 3 und kommt wieder zurück nach 2, und hat nun alle Türen genau ein Mal durchquert. Oder sie geht in der umgekehrten Richtung nach 3, 5 und kommt ebenfalls wieder zurück nach **2**.

4. Mit jedem Schlag werden 4 Steine mehr: Der zerschlagene Stein fällt weg, und stattdessen gibt es fünf neue Steine. Ganz egal, auf welchen Stein Thor schlägt, gibt es nach dem ersten Schlag also 11 Steine, nach dem zweiten Schlag 15 Steine, nach dem dritten Schlag 19 Steine und nach dem vierten Schlag **23 Steine**. (Mathematisch gesprochen: Die Anzahl der Steine bleibt immer kongruent 3 modulo 4.)

5. Etwas leichter, als die gefärbten Seiten zu zählen, ist es, diejenigen zu zählen, die an einem anderen Würfel kleben. Wir suchen also Würfel, die an genau zwei Seiten verklebt sind. Der erste Würfel ganz rechts hat nur einen Nachbarn. Dann folgen 7 Würfel, die schlangenartig aneinandergeklebt sind, also immer zwei Nachbarn haben. Der nächste Würfel (das ist von links gesehen derjenige in der zweiten Reihe und zweiten Spalte) hat drei Nachbarn. Die restlichen drei links oben haben ebenfalls jeweils zwei Nachbarn. Somit gibt es **10 Würfel**, die jeweils 4 farbige Seitenflächen haben werden.

6.
   - (A) könnte zwar stimmen, es könnte aber auch sein, dass einige lila Aliens auf der Venus oder Beteigeuze leben.
   - (B) könnte zwar stimmen, es könnte aber auch sein, dass auf dem Mars zusätzlich auch lila Aliens leben.
   - (C) könnte zwar stimmen, es könnte aber auch sein, dass die Venus unbewohnt ist und die lila Aliens irgendwo anders leben.
   - (D) könnte zwar stimmen, es könnte aber auch sein, dass lila Aliens auch woanders leben, oder dass die Venus sogar unbewohnt ist und alle lila Aliens woanders leben.
   - **(E) muss stimmen**, da grüne Aliens nur am Mars und nirgendwo anders leben können, insbesondere eben auch nicht auf der Venus.

7. Jeder Innenwinkel eines Achtecks beträgt 135°. (Dies kann man sich auch ausrechnen: Es gibt 8 gleiche Außenwinkel, die zusammen 360° ergeben müssen, also hat jeder Außenwinkel $360^\circ : 8 = 45^\circ$, und der entsprechende Innenwinkel also $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.) Unten links sehen wir, dass der stumpfe Winkel einer Raute genau so einem Innenwinkel von 135° entspricht.

   Alternativ kann man, wenn man den Innenwinkel eines Achtecks nicht kennt, auch noch so argumentieren: Wir bezeichnen den spitzen Winkel der Raute mit α. Oben links entspricht ein Innenwinkel einem Quadratwinkel und einem spitzen Winkel einer Raute, unten dagegen setzt derselbe Innenwinkel sich aus drei spitzen Rautenwinkeln zusammen. Also gilt $90^\circ + \alpha = 3\alpha$. Daraus folgt sofort $\alpha = 45^\circ$, und für den anderen Winkel der Raute gilt dann $180^\circ - 45^\circ = \mathbf{135^\circ}$.

8. Es gibt also $65 - 8 = 57$ schwarze Kugeln. Im schlimmsten Fall erwischt man mit den ersten 11 Zügen immer nur schwarze Kugeln, bis man 55 schwarze Kugeln heraußen liegen hat. Spätestens beim **12. Zug** muss man aber eine weiße Kugel erwischen, da es sonst ja mindestens 60 schwarze Kugeln gegeben haben müsste.

9. Seien x, y und z die Seitenlängen des Würfels. Es gilt also $xy = A$, $yz = B$ und $zx = C$. Das Volumen, das wir berechnen möchten, entspricht xyz. Wir sehen, dass sich dies zusammensetzen lässt als $xyz = \sqrt{x^2y^2z^2} = \sqrt{xy \cdot yz \cdot zx} = \mathbf{\sqrt{ABC}}$.

   In diesem Fall kann man viele der Antwortmöglichkeiten aber auch schon durch Betrachtung der physikalischen Größeneinheit ausschließen: Die Flächen haben jeweils m^2 als Einheit, die gesuchte Einheit des Volumens ist m^3.

   - Für (A) ergibt sich als Einheit $ABC = \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 = \mathrm{m}^6$.
   - Für (C) ergibt sich $\sqrt{AB + BC + CA} = \sqrt{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 + \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 + \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2} = \sqrt{\mathrm{m}^4 + \mathrm{m}^4 + \mathrm{m}^4} = \sqrt{\mathrm{m}^4} = \mathrm{m}^2$.
   - Für (D) ergibt sich $\sqrt[3]{ABC} = \sqrt[3]{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 \cdot m^2} = \sqrt[3]{\mathrm{m}^6} = \mathrm{m}^2$.
   - Und für (E) erhalten wir $2(A + B + C) = 2(\mathrm{m}^2 + \mathrm{m}^2 + \mathrm{m}^2) = \mathrm{m}^2$.
   - Lediglich bei (B) gilt wie gewünscht $\sqrt{ABC} = \sqrt{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 \cdot m^2} = \sqrt{\mathrm{m}^6} = \mathrm{m}^3$.

10. Wie wir wissen, ist 2 die einzige gerade Primzahl. 1001 kann nicht die Summe zweier ungerader Primzahlen sein, da eine Summe zweier ungerader Zahlen gerade wäre. Also ist eine der beiden Primzahlen gleich 2. Es bleibt also nur die Möglichkeit $1001 = 2 + 999$, aber 999 ist keine Primzahl. Es ist daher **auf keine Art** möglich, 1001 als Summe zweier Primzahlen darzustellen.

11. Sei X das Volumen des Teils, der in beiden Würfeln enthalten ist. Es gilt laut Angabe, dass X 10% von V und 15% von W ausmacht, also $X = \frac{10}{100}V = \frac{15}{100}W$. Wir multiplizieren beide Seiten mit 100 und erhalten $10V = 15W$. Dividieren wir noch durch 10, so haben wir $\mathbf{V} = \frac{15}{10}W = \mathbf{\frac{3}{2}W}$.

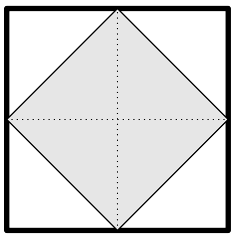
12. Je schmäler die Vase an einer Stelle ist, umso schneller steigt der Wasserstand (da weniger Wasser benötigt wird, um die Stelle zu füllen). Wir überlegen für jede Vase, wie die Wasserhöhe sich bei konstanter Füllgeschwindigkeit ändern würde.

   - Bei (A) steigt die Höhe linear an.
   - Bei (B) steigt die Höhe zuerst langsam, dann in der Mitte schnell, und am Ende wieder langsam.
   - Bei (C) steigt die Höhe zuerst sehr schnell, dann bis zur Mitte immer langsamer, und dann bis oben wieder immer schneller.
   - Bei (D) steigt die Höhe am Anfang sehr schnell und dann immer langsamer.
   - Bei (E) steigt die Höhe zuerst schnell, dann bis zur Mitte der Kugel immer langsamer, dann bis zum oberen Ende der Kugel wieder schneller, und zuletzt im Zylinder mit konstanter Geschwindigkeit.

   Der abgebildete Graph entspricht daher am ehesten **Vase (D)**.

13. Die Zahl $\sqrt{17}$ liegt zwischen 4 und 5 (wegen $4^2 = 16 < 17 < 25 = 5^2$). (Der Taschenrechner verrät $\sqrt{17} \approx 4{,}123$.) Also ist der Inhalt des ersten Betrags negativ, der des zweiten (logischerweise als Summe zweier positiver Zahlen) positiv. Wir rechnen aus: $|\sqrt{17} - 5| + |\sqrt{17} + 5| = 5 - \sqrt{17} + \sqrt{17} + 5 = \mathbf{10}$.

14. Wenn man das gesamte Gebilde auf halber Höhe durchschneidet, sieht man, dass der Oktaeder sich aus zwei identischen Pyramiden zusammensetzt. Das Volumen einer Pyramide wiederum berechnet sich als „Grundfläche mal Höhe Drittel“. Die Grundfläche macht genau die Hälfte einer Würfelseitenfläche aus, also die Hälfte von 1, wie man bei Betrachtung gerade von oben leicht sieht:

   Die Höhe ist ebenfalls gleich der Hälfte einer Seitenlänge, also $\frac{1}{2}$.

   Somit gilt Volumen Pyramide $= \frac{\text{Grundfläche}\cdot\text{Höhe}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{12}$. Der Oktaeder, der sich aus zwei solchen Pyramiden zusammensetzt, hat das doppelte Volumen, also $2 \cdot \frac{1}{12} = \mathbf{\frac{1}{6}}$.

15. Die Koordinaten eines Streckenmittelpunktes berechnen sich, indem man die Koordinaten der Endpunkte addiert und die Summe halbiert, was sich zum Beispiel für die x-Koordinate von N so berechnet: $2 = \frac{r+t}{2}$.

Für die gesamte Summe gilt daher, wenn man sie geschickt anders anschreibt (wobei wir uns zu Nutze machen, dass $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$):

$$p+q+r+s+t+u = \frac{p+r}{2} + \frac{r+t}{2} + \frac{t+p}{2} + \frac{q+s}{2} + \frac{s+u}{2} + \frac{u+q}{2} = -2+2+3+1-1+2 = \mathbf{5}.$$

16. Der „Trick" hier besteht darin, die Fallunterscheidung mit der richtigen Annahme zu beginnen, dann ist sie schnell erledigt. Nehmen wir an, „iv) Real Madrid wird gewinnen" ist wahr. Dann gilt auch „i) Das Spiel wird nicht unentschieden ausgehen", „ii) Real Madrid wird mindestens ein Tor schießen" und „iii) Real Madrid wird nicht verlieren", also hätten wir schon eine wahre Aussage mehr, als wir haben dürfen. Daher ist iv) sicher falsch, Real Madrid hat nicht gewonnen.

Nehmen wir an, Real Madrid hat unentschieden gespielt. Damit ist „i) Das Spiel wird nicht unentschieden ausgehen" falsch und iv) laut voriger Überlegung ebenso, also müssen alle anderen Prognosen richtig sein. Aber „v) Es werden genau drei Tore im Spiel erzielt" kann bei einem Spiel, das unentschieden ausgegangen ist, nicht eintreten.

Also hat Real Madrid verloren. Damit sind Aussagen „iii) Real Madrid wird nicht verlieren" und „iv) Real Madrid wird gewinnen" falsch, die anderen drei folglich wahr. Damit sind laut v) genau 3 Tore gefallen. Laut ii) hat Real Madrid mindestens eines dieser Tore gemacht. Mehr können es nicht gewesen sein, da sie sonst ja gewonnen hätten.

Somit hat Real Madrid **genau 1 Tor** geschossen.

17. Eine fünftel Drehung entspricht 72°. Damit das Fünfeck das Loch wieder vollständig füllt, muss die Drehung in Summe genau ein Vielfaches einer fünftel Drehung ausmachen. Wenn x die Anzahl der Schritte bezeichnet, suchen wir also die kleinste ganze Zahl x (≥ 0), sodass $x \cdot 21°$ ein Vielfaches von 72° ist, also $x \cdot 21° = y \cdot 72°$ mit einer ganzen Zahl y.

Für die weitere Berechnung lassen wir das °-Zeichen weg. Zunächst dividieren wir beide Seiten durch 3 und erhalten $7x = 24y$. Anders ausgedrückt suchen wir das kleinste x, sodass $y = \frac{7x}{24}$ eine ganze Zahl ist. Das gilt spätestens bei $x = 24$, also könnten wir die ersten 24 Züge auch durchprobieren.

Etwas geschickter ist es, die möglichen ganzzahligen Werte für y zu betrachten: Für 7 gibt es eine Lösung (nämlich das schon erwähnte $x = 24$), daher brauchen wir hier nur 6 Werte durchprobieren und sehen, dass für $y = 1, 2, \ldots, 6$ keine ganzzahligen Werte von y herauskommen.

Mit etwas mathematischem Wissen geht all das auch viel leichter: Damit der Bruch $\frac{7x}{24}$ eine ganze Zahl sein kann, müssen alle Primfaktoren aus dem Zähler (also von $24 = 2^3 \cdot 3$) auch im Nenner vorkommen. Der 7er enthält keine davon, also muss x alle enthalten. Das kleinste solche x ist nun einmal 24 selbst.

Das hätte auch schon ohne das vorherige Kürzen funktioniert: Hätten wir im ungekürzten Bruch gefordert, dass $\frac{21x}{72}$ eine ganze Zahl sein muss, hätten wir benötigt, dass alle Primfaktoren von $72 = 3^2 \cdot 2^3$ in $3 \cdot 7 \cdot x$ enthalten sein müssen. Hier hätte $3 \cdot 7$ uns den einen 3er erledigt, und die restlichen Primfaktoren hätten in x enthalten sein müssen, wobei auch hier $2^3 \cdot 3 = 24$ das kleinste solche x wäre.

Ein weiterer Ansatz ist der folgende: Der kleinstmögliche Wert, den beide Seiten von $x \cdot 21° = y \cdot 72°$ gleichzeitig annehmen können, muss gleichzeitig ein Vielfaches von 21° sein (da er gleich $x \cdot 21°$ ist) und ein Vielfaches von 72° (da er gleich $y \cdot 72°$ ist). Wie der Name schon sagt, suchen wir also das kleinste gemeinsame Vielfache von 21 und 72. Die Berechnungsvorschrift dafür lautet, dass wir zunächst die Primfaktorisierung beider Zahlen betrachten, also $21 = 3 \cdot 7$ und $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Nun nehmen wir jeden Primfaktor so oft, wie er auf der Seite, die ihn öfter benötigt, vorkommt, und erhalten das kleinste gemeinsame Vielfache $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, woraus sich sofort $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 : 21 = 24$ und $y = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 : 72 = 7$ ergibt.

Wofür wir uns bei all diesen Überlegungen eigentlich interessieren, ist aber nur der Wert von y, der gemäß aller obiger Überlegungen 7 beträgt. Nach sieben fünftel Drehungen (also einer ganzen und zwei fünftel Drehungen) erhalten wir Bild **(B)**.

18. Wir heben heraus und erhalten $18^{2017} + 18^{2018} = 18^{2017}(1+18) = 18^{2017} \cdot 19 = \left(2 \cdot 3^2\right)^{2017} \cdot 19 = 2^{2017} \cdot 3^{4034} \cdot 19$. Daraus folgt, dass $8 = 2^3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $38 = 2 \cdot 19$ und $48 = 2^4 \cdot 3$ alle darin enthalten sind. Die Zahl enthält aber keinen einzigen Primfaktor 7 und ist damit auch kein Vielfaches von $\mathbf{28} = 2^2 \cdot 7$.

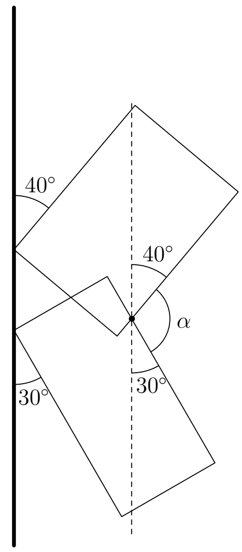
19. Falls die Produkte von Nadia und Riny einen gemeinsamen Teiler haben, so hat auch deren Summe diesen Teiler, ist also keine Primzahl. Hätte also zum Beispiel eine der beiden Personen den 4er und die andere Person den 6er erhalten, wären beide Produkte durch 2 teilbar, und somit auch deren Summe. Also müssen

die Karten 4 und 6 an dieselbe Person gegangen sein. Ebenso müssen die Karten 3 und 6, die beide durch 3 teilbar sind, an dieselbe Person gegangen sein.

Folglich hat Nadia die Karten 3, 4 und 6 erhalten, und Riny 5 und 7. Wir überprüfen sicherheitshalber, ob die Summe der Produkte auch tatsächlich eine Primzahl ist: $3 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 72 + 35 = 107$ ist tatsächlich prim.

Die Summe von Nadias Karten ist $3 + 4 + 6 =$ **13**.

20. Wenn man die senkrechte Linie parallelverschiebt, findet man die beiden Winkel mit 30° und 40° wegen der Parallelität der Rechteckseiten rechts wieder:



Für α ergibt sich damit $\alpha = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ =$ **110°**.

21. Zuerst finden wir heraus, wie hoch diese Summe bei jedem Quadrat ist. Addiert man die drei Summen der drei Quadrate, so hat man jede Zahl von 1 bis 6 genau zwei Mal gezählt (da jede Zahl Teil von genau 2 Quadraten ist). Das Dreifache der Summe in einem Quadrat ist also gleich $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42$, entsprechend ist die Summe in jedem Quadrat gleich 14.

    Würden die drei Zahlen 4, 5 und 6 im selben Quadrat vorkommen, wäre dessen Summe schon mindestens 15, also zu hoch. Wenn zwei dieser drei Zahlen auf derselben senkrechten Prismakante vorkommen würden, gäbe es keine Art, die dritte Zahl so zu platzieren, dass sie nicht im selben Quadrat wie diese beiden wäre. Daher enthält jede der drei senkrechten Prismakanten genau eine der drei Zahlen 4, 5 und 6.

    Für x kommen somit nur noch die Zahlen 2 oder 3 in Frage.

    Wäre $x = 3$, müsste die vierte Ecke des Quadrats, von dem wir schon drei Werte kennen, gleich $14 - 1 - 3 - 5 = 5$ sein, aber 5 ist bereits vergeben.

    Eine mögliche Anordnung dagegen besteht sicher darin, auf einer senkrechten Kante 1 und 6, auf einer weiteren 2 und 5, und auf einer dritten 3 und 4 zu platzieren. Die Summe jeder senkrechten Kante wäre dann 7, und die Summe jedes Quadrats, das aus genau zwei solchen Kanten besteht, gleich 14 wie gefordert. Somit ist $x = 2$ **möglich und eindeutig**.

22. Die elegante Methode besteht im Einsatz des Satzes von Vieta: Für die beiden Lösungen m und n gilt demnach $m + n = 1$ und $mn = -2018$. Da es eben Lösungen der Gleichung sind, gilt aber natürlich auch $n^2 - n - 2018 = 0$, also $n^2 = 2018 + n$. Folglich erhalten wir für den gesuchten Ausdruck $n^2 + m = 2018 + n + m = 2018 + 1 =$ **2019**.

    Man kann es aber auch mit brutaler Gewalt durchrechnen (wobei wir am Ende $n^2 + m$ und $m^2 + n$ beide ausrechnen um sicherzugehen, dass das Ergebnis unabhängig davon ist, welche der Lösungen man als n

wählt):

$$
\begin{aligned}
\{m, n\} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2018} \\
&= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1 + 4 \cdot 2018}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8073}}{2} \\
\{m^2, n^2\} &= \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8073}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \pm 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{8073}}{2} + \frac{8073}{4} \\
&= \frac{8074}{4} \pm \frac{\sqrt{8073}}{2} \\
n^2 + m &= \frac{8074}{4} - \frac{\sqrt{8073}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8073}}{2} \\
&= \frac{8074 + 2}{4} = 2019 \\
m^2 + n &= \frac{8074}{4} + \frac{\sqrt{8073}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{8073}}{2} \\
&= \frac{8074 + 2}{4} = 2019
\end{aligned}
$$

23. Auch hier muss man in möglichst geschickter Reihenfolge Fälle unterscheiden. Nehmen wir als erstes an, D wäre der Lügner, wäre also entgegen seiner Aussage nicht der Kleinste. Dann müssen A, B und C die Wahrheit sagen, aber alle drei behaupten ebenfalls, nicht der Kleinste zu sein, es gäbe also gar keinen Kleinsten. Das ist nicht möglich. Somit kann D nicht der Lügner sein, ist also sicher der Kleinste. Daraus folgt sofort, dass auch B die Wahrheit sagt wenn er behauptet, nicht der Kleinste zu sein.

    Würde C die Wahrheit sagen, wäre C der Größte und D der Kleinste, und somit hätte auch A die Wahrheit gesagt, dann gibt es gar keinen Lügner. Das ist ebenfalls nicht möglich.

    Daher ist C der Lügner und kann somit nicht der Größte sein. A sagt die Wahrheit und ist entsprechend ebenfalls nicht der Größte. Damit kann nur noch **B der Größte** sein. Mögliche Anordnungen sind $B > A > C > D$ oder $B > C > A > D$.

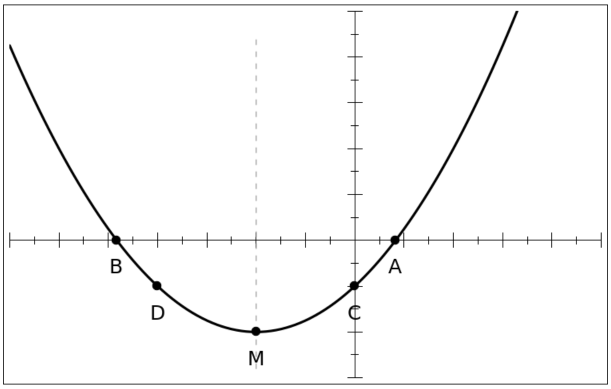
24. Durch Einsetzen geschickter Werte von x und y erhalten wir $f(2)$ und $f(3)$:

$$
\begin{aligned}
x = 1, y = 1: &\qquad f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
x = 1, y = 2: &\qquad f(3) = f(1+2) = f(1) \cdot f(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

    Um $f(0)$ zu erhalten, setzen wir $x = 1$ und $y = 0$ ein und sehen $f(1) = f(1+0) = f(1) \cdot f(0)$. Dividieren wir beide Seiten durch $f(1)$ (was gleich $\frac{1}{2}$, also ungleich 0 ist), so bleibt $1 = f(0)$.

    Nun brauchen wir nur noch zu addieren: $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{15}{8}}$.

25. Wir machen uns einige der Symmetrieeigenschaften in der Parabel zunutze:



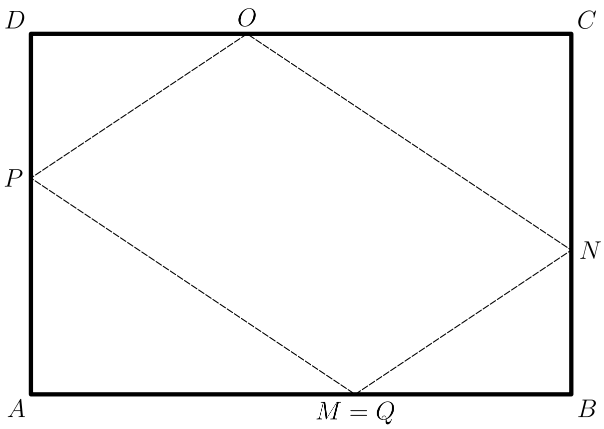
Die beiden Schnittpunkt mit der x-Achse sind die beiden Nullstellen, also die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, und haben somit Koordinaten $A = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p}{4} - q}, 0\right)$ und $B = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p}{4} - q}, 0\right)$. Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man, indem man einfach den dort geltenden Wert $x = 0$ einsetzt und Punkt $C = (0, q)$ findet. All diese Überlegungen gelten für alle möglichen Lagen der Parabel (nach oben oder unten offen, Minimum/Maximum links oder rechts oder genau auf der y-Achse).

Die Symmetrieachse der Parabel geht durch deren Minimum/Maximum, das bei $x = -\frac{p}{2}$ liegt. Das erhält man, indem man entweder den Mittelpunkt zwischen A und B ausrechnet (als $\frac{A+B}{2}$), oder die Ableitung $f'(x) = 2x + p$ der Parabelfunktion bildet und nullsetzt.

Auch der Kreis muss symmetrisch bezüglich dieser Symmetrieachse sein. (Wenn man den Umkreismittelpunkt von ABC konstruiert, muss dieser unter anderem auf der Streckensymmetrale von AB liegen, die genau der Symmetrieachse entspricht.)

Daraus folgt, dass auch der gesuchte Punkt D symmetrisch zu C bezüglich der Symmetrieachse $x = -\frac{p}{2}$ liegen muss. Für den x-Wert folgt, da der x-Wert von C gleich 0 ist, sofort, dass dieser doppelt so weit von der y-Achse entfernt sein muss wie die Symmetrieachse, also $x = -\frac{p}{2} \cdot 2 = -p$. Der y-Wert ist gleich dem von C, da die Symmetrieachse parallel zur y-Achse ist, also $y = q$. Wir erhalten daher den Punkt $D = (\mathbf{-p, q})$.

26. Wir bezeichnen die Punkte, wo der Ball auf die Seiten auftrifft, der Reihe nach mit M, N, O, P und Q. Durch Zufall ergibt es sich, dass der Ball genau an derselben Stelle wieder auftrifft:



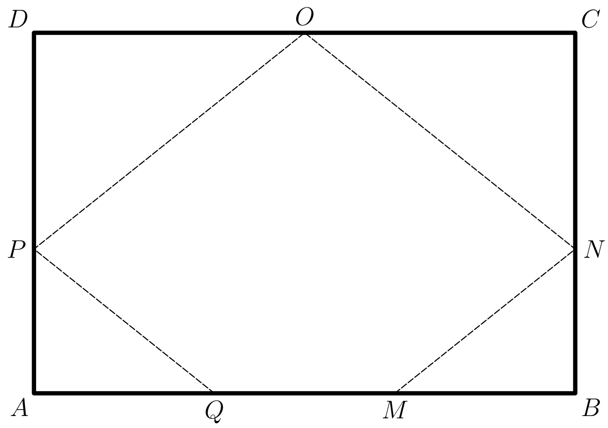
Um das auszurechnen, benötigen wir die Beobachtung, dass die Dreiecke MBN, OCN, ODP und MAP alle zueinander ähnlich sind. In MBN gilt $BM : BN = 1{,}2 : 0{,}8 = 3 : 2$.

Für CN bleibt $CN = BC - BN = 2 - 0{,}8 = 1{,}2$. Wegen $CO : CN = 3 : 2$ muss CO eineinhalb Mal so lang sein, also $CO = 1{,}8$.

Die Länge DO beträgt $DO = CD - CO = 3 - 1{,}8 = 1{,}2$. Wegen $DO : DP = 3 : 2$ beträgt DP zwei Drittel davon, also $DP = 0{,}8$.

Schließlich bleibt für AP noch $AP = AD - DP = 2 - 0{,}8 = 1{,}2$ übrig. Wegen $AQ : AP = 3 : 2$ beträgt AQ das Eineinhalbfache, also $AQ = \mathbf{1{,}8}$.

Es ist wichtig anzumerken, dass das Zusammentreffen von M und Q reiner Zufall ist. Würden wir zum Beispiel mit $BM = 1$ und $BN = 0{,}8$ beginnen, so hätten wir ein Verhältnis von $5 : 4$. Für die weiteren Seiten würde sich mit derselben Rechnung wie oben ergeben $CN = 1{,}2$, dann $CO = 1{,}5$, daher $DO = 1{,}5$ und somit $DP = 1{,}2$, und schließlich $AP = 0{,}8$ und $AQ = 1$:



27. Damit der äußere Betrag gleich 1 ist, muss dessen Inhalt entweder gleich 1 oder gleich -1 sein.

 - *Fall* $|4^x - 3| - 2 = 1$ *:* Wir bringen den 2er auf die andere Seite und haben $|4^x - 3| = 3$ zu lösen. Auch hier haben wir noch einmal zwei Unterfälle: Entweder, der Inhalt dieses zweiten Betrags ist gleich 3 oder gleich -3.
   - *Fall* $4^x - 3 = 3$ *:* Das ist äquivalent zu $4^x = 6$, und ist lösbar. (Die genaue Lösung zu finden ist nicht erforderlich. Der Taschenrechner verrät aber, dass $x = \frac{\ln(6)}{\ln(4)} \approx 1{,}29$.)
   - *Fall* $4^x - 3 = -3$ *:* Hier müsste, nach Addition von 3 auf beiden Seiten, $4^x = 0$ gelten. Ein solches reelles x gibt es nicht.
 - *Fall* $|4^x - 3| - 2 = -1$ *:* Wir addieren auf beiden Seiten 2 und erhalten $|4^x - 3| = 1$. Ein letztes Mal unterscheiden wir Fälle, da dies wiederum genau dann erfüllt ist, wenn der Inhalt des Betrages gleich 1 oder gleich -1 ist:
   - *Fall* $4^x - 3 = 1$ *:* Das ist äquivalent zu $4^x = 4$, also $x = 1$.
   - *Fall* $4^x - 3 = -1$ *:* Nach Addition von 3 erhalten wir $4^x = 2$, was für $x = \frac{1}{2}$ gilt.

 Insgesamt haben wir daher **3 verschiedene reelle Lösungen** gefunden.

28. Sei s die Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks. Das Dreieck IGH ist genau halb so groß wie das Dreieck EGD (da die Seiten zueinander paarweise parallel sind und die Höhe genau halb so groß ist), daher ist auch IH genau halb so lang wie ED, beträgt also $\frac{s}{2}$.

 Die Länge FC beträgt $2s$, wie man leicht sieht, wenn man das Sechseck aus 6 identischen gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge s zusammensetzt. Da FI und HC wegen der Symmetrie gleich lang sind, gilt $FI = \frac{FI+HC}{2} = \frac{FC-IH}{2} = \frac{2s-\frac{s}{2}}{2} = \frac{3}{4}s$.

 Wir vergleichen nun beide gesuchten Flächen zur Fläche X von IHG. Wir wissen, das IHG genau ein Viertel der Fläche von EDG hat (da die Höhe und die Grundlinie jeweils halb so groß sind), also ist die Fläche von $IHDE$ drei Mal so groß wie X. Die Dreiecke IHG und GIF dagegen teilen dieselbe Höhe, aber die Grundlinie FI von GIF ist eineinhalb Mal so lang ist wie die Grundlinie IH von IHG, daher ist die Fläche von GIF eineinhalb Mal so groß wie X. Daraus ergibt sich, dass $IHDE$ genau doppelt so groß ist wie GIF, also $GIF : IHDE =$ **1 : 2**.

 Wenn man dieser eher verbalen Argumentation nicht traut, kann man es auch ausrechnen:

 Sei h die halbe Höhe des Sechsecks (die wir ausrechnen könnten als $h = s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, was die weiteren Rechnungen aber nur unnötig länger macht).

 Die Fläche des Dreiecks GIF, berechnet mit der Grundlinie FI, beträgt $[GIF] = \frac{3}{4}s \cdot h \cdot \frac{1}{2} = sh \cdot \frac{3}{8}$.

 Die Fläche von $IHDE$ beträgt $[IHDE] = [EDG] - [IHG] = s \cdot 2h \cdot \frac{1}{2} - \frac{s}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{2} = sh \cdot (1 - \frac{1}{4}) = sh \cdot \frac{3}{4}$.

 Also ergibt sich $[GIF] : [IHDE] = sh \cdot \frac{3}{8} : sh \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} : \frac{3}{4} =$ **1 : 2**.

29. Sei m die Anzahl der Mädchen und b die Anzahl der Burschen. Laut Angabe gilt $m = 1{,}4 \cdot b$. Wir multiplizieren beide Seiten mit 5, um die Kommazahl loszuwerden, und erhalten $5m = 7b$.

Die Anzahl der Schülerdelegationen mit genau einem Mädchen und einem Burschen beträgt $m \cdot b$, die Anzahl aller möglichen Schülerdelegationen beträgt $\binom{m+b}{2} = \frac{(m+b)(m+b-1)}{2}$. Damit die Wahrscheinlichkeit genau $\frac{1}{2}$ ist, muss gelten $\frac{(m+b)(m+b-1)}{2} = 2 \cdot m \cdot b$. Multiplizieren wir beide Seiten mit 2 und multiplizieren die Klammern links aus, so erhalten wir $m^2 + 2mb + b^2 - m - b = 4bm$, also weiters $m^2 - 2bm + b^2 = m + b$ und schließlich $(m - b)^2 = m + b$.

Jetzt ersetzen wir alle b durch $\frac{5}{7}m$ und bekommen

$$\begin{aligned}
\left(m - \frac{5}{7}m\right)^2 &= m + \frac{5}{7}m \\
\left(\frac{2}{7}m\right)^2 &= \frac{12}{7}m \\
\frac{4}{49}m^2 &= \frac{12}{7}m && \Big| : m \neq 0 \\
\frac{4}{49}m &= \frac{12}{7} && \Big| \cdot \frac{49}{4} \\
m &= \frac{12 \cdot 49}{7 \cdot 4} = 21
\end{aligned}$$

woraus sich weiters ergibt $b = \frac{5}{7}m = 15$. Die Klasse hat daher $21 + 15 =$ **36 Kinder**.

Bei dieser Aufgabe kann man alternativ auch sehr schnell die angebotenen Lösungsmöglichkeiten ausprobieren. Die Schülerzahl s der Klasse muss wegen $s = m + b = m + \frac{5}{7}m = \frac{12}{7}m$ und folglich $m = \frac{7}{12}s$ durch 12 teilbar sein. Antwort (A) mit $s = 20$ scheidet daher sofort aus. Es bleiben Optionen (B) 14 Mädchen, 10 Burschen, (C) 21 Mädchen, 15 Burschen und (D) 28 Mädchen, 20 Burschen. Für jede davon ist $m \cdot b$ (Anzahl Schülerdelegationen mit genau einem Mädchen und einem Burschen) und $\frac{s \cdot (s-1)}{2}$ (Anzahl Schülerdelegationen insgesamt) schnell ausgerechnet.

Anmerkung: Bei allen obigen Überlegungen rechnen wir „Anzahl günstige durch Anzahl mögliche". Alternativ kann man auch die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, beim ersten Zug ein Mädchen und beim zweiten einen Burschen auszuwählen, oder umgekehrt. Diese beträgt $\frac{m}{m+b} \cdot \frac{b}{m+b-1} \cdot 2$ (wobei die Multiplikation mit 2 daher kommt, dass zuerst einen Burschen und dann ein Mädchen auszuwählen dieselbe Wahrscheinlichkeit hat). Der dabei entstehende Quotient ist genau derselbe wie zuvor.

30. Mit einem Taschenrechner hätten wir ganz schnell ausgerechnet, dass $15! = 1307674368000$, also 3 und 8 die fehlenden Zahlen sind.

Da wir so einen Taschenrechner beim Bewerb nicht zur Verfügung haben, behelfen wir uns mit einigen Tricks. Zunächst dividieren wir durch 1000, um die drei Nullen hinten wegzubekommen. Es bleibt (wenn man 8 durch 8 dividiert und 5, 10, 15 jeweils durch 5)

$$\frac{15!}{1000} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 3$$

übrig. Davon rechnen wir die Einerstelle aus, indem wir modulo 10 rechnen, das heißt, nach jeder Multiplikation werfen wir alles links der Einerstelle einfach weg. So erhalten wir, dass die Einerstelle gleich 8 ist.

Außerdem ist 15! durch 9 teilbar, daher auch die Ziffernsumme. Die Summe der bisher bekannten Ziffern ist 42. Wenn wir noch genau eine Ziffer hinzufügen dürfen, und die Summe danach durch 9 teilbar sein muss, muss diese Ziffer gleich 3 sein. (Die nächstgrößere Möglichkeit wäre 12, das ist aber keine einzelne Ziffer mehr.)

Es fehlen daher die Zahlen **3 und 8**.