Känguru der Mathematik 2017
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2017

Lösungsvektor

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	E	B	C	E	C	E	C	A	C	C	E	D	C	B	B	A	C	D	A	D	E	D	C	E	B	E	A	B	D

3 Punkte Beispiele

1. Der Wert von $\frac{20\cdot 17}{2+0+1+7}$ ist

(A) 3,4 (B) 17 (C) 34 (D) 201,7 (E) 340

Es gilt $\frac{20\cdot 17}{2+0+1+7} = \frac{340}{10} = 34$.

2. Peter schrieb, wie in der Abbildung zu sehen, das Wort KANGAROO auf ein durchsichtiges Stück Glas.

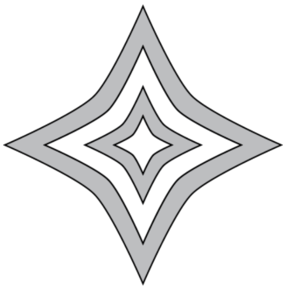
Was kann er sehen, wenn er das Stück Glas zuerst um die rechte Seitenkante auf die Rückseite wendet und anschließend auf dem Tisch liegend um 180° dreht?

(A)  (B)  (C)  (D) 
(E) 

Nachdem er das Stück Glas um die rechte Seitenkante auf die Rückseite gewendet hat, schaut es so aus

Das anschließende Drehen um 180° liefert

3. Angelika bastelt ein Schmuckstück aus zwei grauen und zwei weißen Sternen. Die Sterne haben Flächeninhalte von $1\ cm^2$, $4\ cm^2$, $9\ cm^2$ bzw. $16\ cm^2$. Sie legt die Sterne wie in der Abbildung übereinander und klebt sie zusammen.



Wie groß ist der Gesamtflächeninhalt des sichtbaren grauen Bereichs?

(A) $9\ cm^2$ (B) $10\ cm^2$ (C) $11\ cm^2$ (D) $12\ cm^2$ (E) $13\ cm^2$

Der große graue Bereich hat einen Flächeninhalt von $16\ cm^2 - 9\ cm^2 = 7\ cm^2$. Der kleine graue Bereich hat einen Flächeninhalt von $4\ cm^2 - 1\ cm^2 = 3\ cm^2$. Der Gesamtflächeninhalt ergibt sich aus der Summe und ist daher $7\ cm^2 + 3\ cm^2 = 10\ cm^2$.

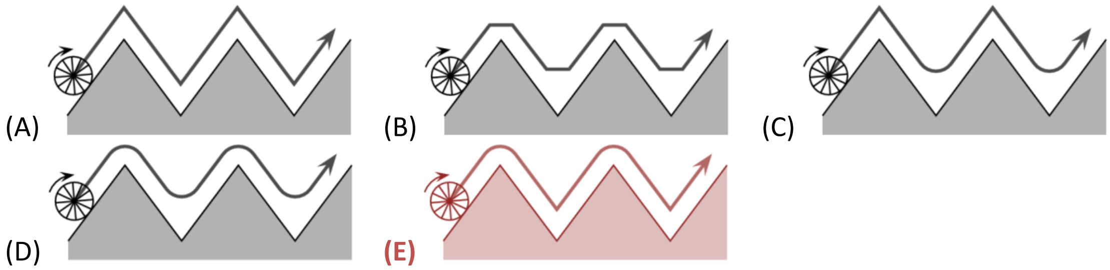
4. Maria hat 24 Euro. Jede ihrer 3 Schwestern hat 12 Euro.

Wie viel muss sie jeder ihrer Schwestern geben, damit alle vier gleich viel Euro haben?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 6

Insgesamt haben Maria und ihre Schwestern $24\,€ + 3 \cdot 12\,€ = 60\,€$. Sobald alle vier gleich viel Geld haben, hat jede von ihnen also $\frac{60}{4} = 15\,€$. Deshalb muss Maria jeder ihrer Schwestern $3\,€$ geben.

5. Ein Rad rollt längs der abgebildeten Zick-Zack-Kurve. Welches der folgenden Bilder zeigt die Kurve, die vom Mittelpunkt des Rads beschrieben wird?



Der Normalabstand des Mittelpunktes des Rads zum Boden ist immer konstant (genau der Radius des Rades). Die Kurve, die vom Mittelpunkt des Rads beschrieben wird, ergibt daher an den Spitzen einen Kreisbogen und in den Tälern eine Zacke.

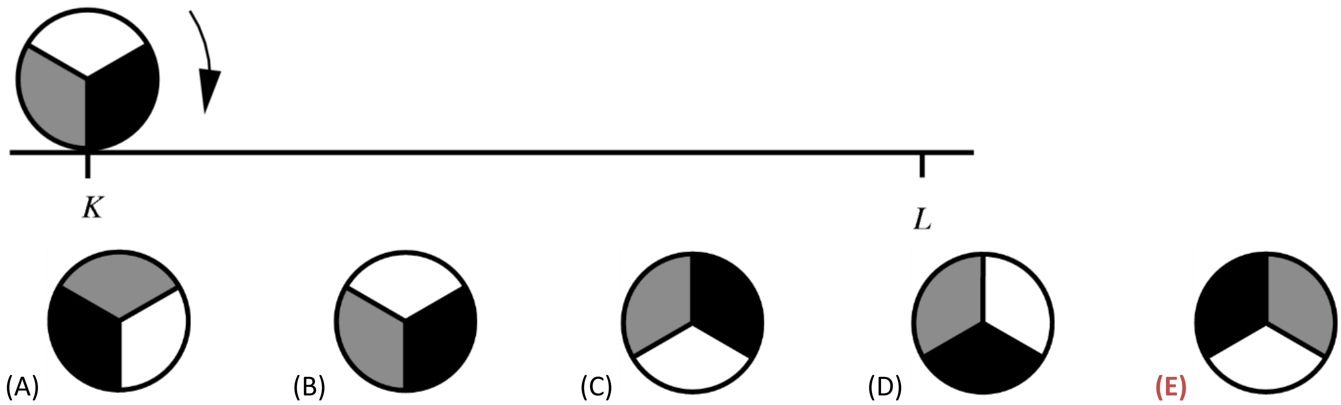
6. Einige Mädchen stehen im Kreis. Die Lehrerin lässt die Mädchen durchzählen. Bianca sagt eins, ihre Nachbarin sagt zwei, und so weiter. Wenn sie im Uhrzeigersinn zählen, sagt Antonia sechs. Wenn sie gegen den Uhrzeigersinn zählen, sagt Antonia neun. Wie viele Mädchen bilden den Kreis?

(A) 11 (B) 12 **(C)** 13 (D) 14 (E) 15

Zwischen Bianca und Antonia stehen im Uhrzeigersinn 4 Mädchen und gegen den Uhrzeigersinn 7. Ohne die beiden stehen also $4 + 7 = 11$ Mädchen im Kreis. Mit Bianca und Antonia bilden also 13 Mädchen den Kreis.

7. Ein Kreis mit Radius 1 rollt auf einer geraden Linie wie abgebildet vom Punkt K zum Punkt L, mit $KL = 11\pi$.

In welcher Lage befindet sich der Kreis, wenn er in L angekommen ist?



Der Kreis macht auf einer Länge von 2π genau eine Umdrehung. Damit macht der Kreis auf der Länge 11π genau 5 ganze Umdrehungen und eine halbe Umdrehung und befindet sich am Punkt L in Lage (D).

8. Martina spielt Schach. In dieser Saison hat sie bereits 15 Partien gespielt, von denen sie neun gewonnen hat. Sie muss noch 5 weitere Partien spielen.

Wie hoch ist ihre Gewinnrate am Ende dieser Saison, wenn sie alle noch ausstehenden Partien gewinnt?

(A) 60 % (B) 65 % **(C) 70** % (D) 75 % (E) 80 %

Insgesamt spielt sie $15 + 5 = 20$ Partien und gewinnt davon $9 + 5 = 14$. Also ist ihre Gewinnrate $\frac{14}{20} = 70\,\%$.

9. Bei einer Hochzeit ist ein Achtel der Gäste minderjährig. Drei Siebentel der erwachsenen Gäste sind Männer.

Wie groß ist der Anteil der erwachsenen Frauen unter allen Gästen?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{7}$ (E) $\frac{3}{7}$

Von den Gästen sind $\frac{7}{8}$ Erwachsene und davon $\frac{4}{7}$ Frauen. Also ist der Anteil an erwachsenen Frauen insgesamt $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{2}$.

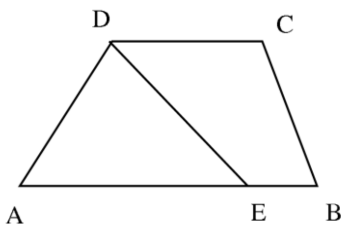
10. Ein wunderlicher Lehrer hat eine Schachtel mit 203 roten, 117 weißen und 28 blauen Knöpfen. Er bittet seine Schüler, ohne hinzusehen je einen Knopf blind aus der Schachtel zu nehmen. Mindestens wie viele Schüler müssen einen Knopf nehmen, sodass sicher drei der entnommenen Knöpfe dieselbe Farbe haben?

(A) 3 (B) 6 **(C) 7** (D) 28 (E) 203

Nach 6 entnommen Knöpfen kann es vorkommen, dass genau 2 Knöpfe von jeder Farbe entnommen wurden (2 rote, 2 weiße und 2 blaue). Bei 7 entnommen Knöpfen müssen von zumindest einer Farbe 3 Knöpfe vorkommen (Schubfachschluss).

4 Punkte Beispiele

11. $ABCD$ ist ein Trapez mit Parallelseiten *AB* und *CD*. Es gilt *AB* = 50 und *CD* = 20. Der Punkt *E* liegt auf der Seite *AB* so, dass die Strecke *DE* das Trapez in zwei Teile gleichen Flächeninhalts teilt. Wie lang ist die Strecke *AE*?



(A) 25 (B) 30 **(C) 35** (D) 40 (E) 45

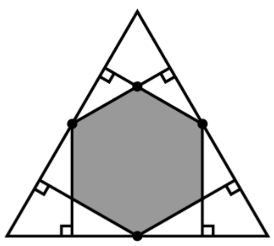
Sei h die Höhe des Trapezes. Die Fläche des Dreiecks AED ist $\frac{AE \cdot h}{2}$. Die Fläche des Trapezes $EBCD$ ist $\frac{(EB+CD) \cdot h}{2}$. Da beide Flächen gleich groß sind, ergibt sich $AE = EB + CD = (50 - AE) + 20$. Also $AE = 35$.

12. Wie viele positive ganze Zahlen *n* haben die Eigenschaft, dass genau eine der zwei Zahlen *n* und *n* + 20 vierziffrig ist?

(A) 19 (B) 20 (C) 38 (D) 39 **(E) 40**

Gesucht sind die Zahlen zwischen 980 und 999, sowie zwischen 9980 und 9999.

13. In einem gleichseitigen Dreieck mit Flächeninhalt 1 werden, wie in der Abbildung zu sehen, aus den Seitenmittelpunkten die sechs Normalen auf die Dreiecksseiten gezeichnet.

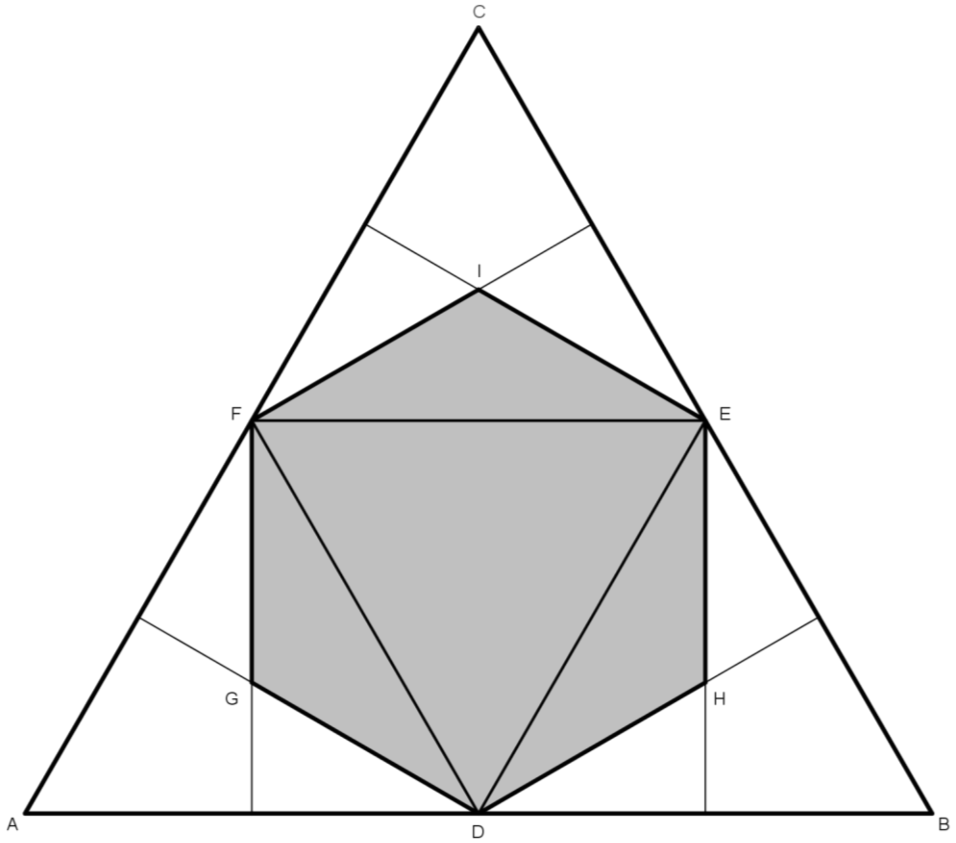


Welchen Flächeninhalt hat das dadurch entstandene graue Sechseck?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{9}$ **(D) $\frac{1}{2}$** (E) $\frac{2}{3}$

Durch Verbinden der Seitenmittelpunkte D, E und F des Dreiecks unterteilt man das Dreieck in vier flächengleiche gleichseitige Dreiecke ADF, DBE, FEC und DEF. Der Flächeninhalt ist jeweils $\frac{1}{4}$.

Die eingezeichneten Normalen sind Höhen der Dreiecke ADF, DBE und FEC mit Höhenschnittpunkten G, H und I.
Da ADF, DBE und FEC gleichseitige Dreiecke sind, dritteln die Dreiecke GDF, DHE und FEI diese jeweils. Die Dreiecke GDF, DHE und FEI haben also jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$.
Das graue Sechseck hat insgesamt den Flächeninhalt $\frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.



14. Die Summe der Quadrate von drei aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen ist 770.

Welche ist die größte dieser Zahlen?

(A) 15 (B) 16 **(C) 17** (D) 18 (E) 19

Es gilt $770 = 15^2 + 16^2 + 17^2$.

15. Ein Riemensystem besteht aus Rädern *A*, *B* und *C*, die sich ohne Rutschen drehen. *B* dreht sich 4 Mal herum, während sich *A* 5 Mal herumdreht, und *B* dreht sich 6 Mal herum, während sich *C* 7 Mal herumdreht. Der Umfang von *C* ist 30 cm. Wie groß ist der Umfang von *A*?

(A) 27 cm **(B) 28 cm** (C) 29 cm (D) 30 cm (E) 31 cm

Wenn sich *C* 14 Mal dreht, dann dreht sich *B* 12 Mal und *A* 15 Mal. Gleichzeit muss sich jedes der Räder um $14 \cdot 30\ cm$ weiterdrehen. Also hat *A* einen Umfang von $\frac{14 \cdot 30}{15}\ cm = 28\ cm$.

16. Tycho plant sein Lauftraining. Er möchte jede Woche an denselben Wochentagen laufen gehen. Niemals will er an zwei aufeinanderfolgenden Tagen laufen. Er möchte aber drei Mal pro Woche laufen. Aus wie vielen möglichen Wochenplänen kann er unter diesen Bedingungen auswählen?

(A) 6 **(B) 7** (C) 9 (D) 10 (E) 35

Es gibt folgende gültige Wochenpläne:

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
✓		✓		✓		
✓		✓			✓	
✓			✓		✓	
	✓		✓		✓	
	✓		✓			✓
	✓			✓		✓
		✓		✓		✓

17. Vier Brüder sind verschieden groß. Tobias ist um gleich viele Zentimeter kleiner als Viktor, wie er größer als Peter ist. Oskar ist wiederum um ebenso viele Zentimeter kleiner als Peter. Tobias ist $184\ cm$ groß, und die vier Brüder sind durchschnittlich $178\ cm$ groß. Wie groß ist Oskar?

(A) $160\ cm$ (B) $166\ cm$ (C) $172\ cm$ (D) $184\ cm$ (E) $190\ cm$

Viktor ist größer als Tobias, Tobias ist größer als Peter, und Peter ist größer als Oskar. Der Durchschnitt von $178\ cm$ ist genau in der Mitte der Größen von Tobias und Peter. Peter ist daher $178\ cm - (184 - 178)cm = 172\ cm$ groß. Oskar ist um gleich viel kleiner als Peter, wie Peter kleiner als Tobias ist. Oskar ist also $172\ cm - 12\ cm = 160\ cm$ groß.

18. Während unseres Urlaubs hat es an 7 Tagen geregnet. Wenn es am Vormittag geregnet hat, war der Nachmittag regenfrei. Wenn es am Nachmittag geregnet hat, war der Vormittag regenfrei. Es gab 5 regenfreie Vormittage und 6 regenfreie Nachmittage. Wie viele Tage hat unser Urlaub gedauert?

(A) 7 (B) 8 **(C) 9** (D) 10 (E) 11

Es hat insgesamt an $5 + 6 = 11$ Halbtagen nicht geregnet. Da es höchstens einen Halbtag pro Tag geregnet hat, gab es 7 verregnete Halbtage. Insgesamt dauerte der Urlaub somit $11 + 7 = 18$ Halbtage, also 9 Tage.

19. Jenny möchte in die Felder einer 3x3-Tabelle Zahlen so eintragen, dass die Summe der Zahlen in jedem der vier 2x2-Quadrate gleich groß ist. Wie die Abbildung zeigt, hat sie bereits drei Zahlen eingetragen. Welche Zahl muss sie ins vierte Eckfeld schreiben?

3		1
2		?

(A) 5 (B) 4 (C) 1 **(D) 0** (E) Die Zahl ist nicht eindeutig bestimmbar.

Die Zahl im mittleren Feld kann beliebig sein, da sie in jedem der vier 2x2-Quadrate vorkommt (Jenny setzt der Einfachheit halber die Zahl 0 ein). Dann setzt sie für zwei der Randfelder wie in der Tabelle die Variablen x und y ein. Das linke obere 2x2-Quadrat liefert die Summe $x + y + 3$. Diese Summe muss auch das rechte obere 2x2-Quadrat liefern. In das rechte Randfeld muss Jenny also $(x + y + 3) - y - 1 = x + 2$ eintragen. Weiters muss sie in das untere Randfeld $(x + y + 3) - x - 2 = y + 1$ schreiben.

3	y	1
x	0	x+2
2	y+1	?

In das vierte Eckfeld muss Jenny die Zahl $(x + y + 3) - (x + 2) - (y + 1) = 0$ eintragen.

20. Sieben positive ganze Zahlen a, b, c, d, e, f, g werden in dieser Reihenfolge nebeneinander angeschrieben. Die Summe aller sieben Zahlen beträgt 2017. Je zwei benachbarte Zahlen unterscheiden sich immer um 1. Welche der Zahlen kann gleich 286 sein?

(A) nur a oder g (B) nur b oder f (C) nur c oder e (D) nur d (E) alle

Wir können von jeder der Zahlen a, b, c, d, e, f und g die Zahl 286 abziehen. Die Summe der sieben Zahlen muss dann $2017 - 7 \cdot 286 = 15$ ergeben und die Frage lautet dann, welche der Zahlen 0 sein kann. Die Zahlen können dabei auch negativ sein.
Für $b = 0$ oder $d = 0$ oder $f = 0$ ist die Summe immer gerade, also nie 15. Für $c = 0$ erreichen wir als maximale Summe $2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 13 < 15$. Symmetrisches gilt für $e = 0$.
Für $a = 0$ finden wir die Lösung $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 15$. Symmetrisches gilt für $g = 0$.

5 Punkte Beispiele

21. Im Primatengehege im Zoo befinden sich vier Gorillas. Alle sind jünger als 18 Jahre. Keine zwei sind gleich alt, und alle ihre Alter sind ganzzahlig. Das Produkt ihrer Alter ist 882. Wie groß ist die Summe ihrer Alter?

(A) 23 (B) 25 (C) 27 **(D) 31** (E) 33

Die Primfaktorzerlegung von 882 ist $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$. Mögliche Alter sind also 14, 7, 9 und 1. Bei allen anderen Verteilungen sind zwei Gorillas gleich alt oder mindestens einer älter als 18. Damit ist die Summe 31.

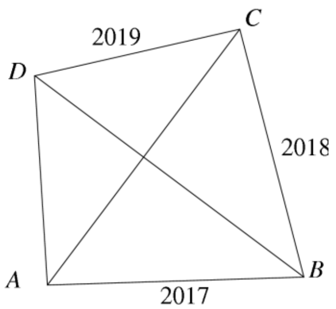
22. Auf den sechs Flächen eines Spielwürfels stehen die Zahlen -3, -2, -1, 0, 1, 2.

Der Würfel wird zweimal geworfen. Die geworfenen Zahlen werden miteinander multipliziert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Produkt negativ ist?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{11}{36}$ (D) $\frac{13}{36}$ **(E) $\frac{1}{3}$**

Das Produkt ist negativ, wenn eine Zahl negativ ist und die andere positiv. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zahl negativ ist, ist $\frac{3}{6}$ und dafür, dass eine Zahl positiv ist, ist $\frac{2}{6}$. Ein negatives Produkt tritt also mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$ auf. Die Multipliaktion mit 2 ergibt sich, da der erste Wurf negativ und der zweite positiv sein kann, oder umgekehrt.

23. Im konvexen Viereck $ABCD$ stehen die Diagonalen zueinander normal. Die Seiten haben die Längen $AB = 2017$, $BC = 2018$ und $CD = 2019$ (Abbildung nicht maßstabsgetreu). Wie lang ist die Seite AD?



(A) 20 (B) 2018 (C) $\sqrt{2020^2 - 4}$ **(D) $\sqrt{2018^2 + 2}$** (E) 2020

Sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann können wir in den vier Dreiecken AMB, BMC, CMD und DMA den Satz von Pythagoras verwenden. Damit erhalten wir die Gleichungen

$$MA^2 + MB^2 = 2017^2,$$
$$MB^2 + MC^2 = 2018^2,$$
$$MC^2 + MD^2 = 2019^2,$$
$$MD^2 + MA^2 = AD^2.$$

Wir subtrahieren nun die zweite Gleichung von der Summe der ersten und dritten Gleichung und erhalten

$$MA^2 + MD^2 = 2017^2 - 2018^2 + 2019^2.$$

Durch Gleichsetzen mit der vierten Gleichung haben wir $AD^2 = 2017^2 - 2018^2 + 2019^2 = (2018-1)^2 - 2018^2 + (2018+1)^2 = 2018^2 - 2 \cdot 2018 + 1 - 2018^2 + 2018^2 + 2 \cdot 2018 + 1 = 2018^2 + 2$. Also ist (D) die Lösung.

24. Eine beliebige zweiziffrige Zahl ist aus den Ziffern a und b zusammengesetzt. Schreibt man das Ziffernpaar drei Mal hintereinander, erhält man eine 6-ziffrige Zahl. Diese neue Zahl ist immer teilbar durch

(A) 2 (B) 5 **(C) 7** (D) 9 (E) 11

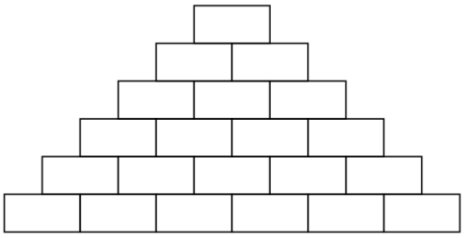
Die Teilbarkeitsregel durch 7 lautet: Zuerst Dreierblöcke einer Zahl alternierend addieren und subtrahieren. Die Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn das Ergebnis durch 7 teilbar ist.
Für die 6-ziffrige Zahl ababab müssen wir also rechnen $aba - bab = (100 \cdot a + 10 \cdot b + a) - (100 \cdot b + 10 \cdot a + b) = 91 \cdot (a - b)$. Da 91 durch 7 teilbar ist, ist die Lösung (C).

25. Mein Freund Heinz möchte ein besonderes Passwort verwenden, das aus sieben Ziffern besteht. Die jeweiligen Ziffern des Passwortes kommen im gesamten Passwort genau so oft vor, wie es ihren Werten entspricht. Außerdem stehen gleiche Ziffern immer aufeinanderfolgend. So kann er zum Beispiel 4444333 oder 1666666 als Passwörter verwenden. Aus wie vielen möglichen Passwörtern kann er auswählen?

(A) 6 (B) 7 (C) 10 (D) 12 **(E) 13**

Die Zahl 7 kann man als folgende fünf Summen darstellen, in denen kein Summand öfter als einmal vorkommt: $7, 6+1, 5+2, 4+3, 4+2+1$. Daraus erhält man Passwörter, indem man jeden Summanden so oft schreibt, wie es seinem Wert entspricht. Dabei kann man die Reihenfolge der Summanden vertauschen. Bei zwei Summanden sind das zwei Anordnungen, bei drei Summanden sechs. Insgesamt haben wir also $1+2+2+2+6 = 13$ mögliche Passwörter.

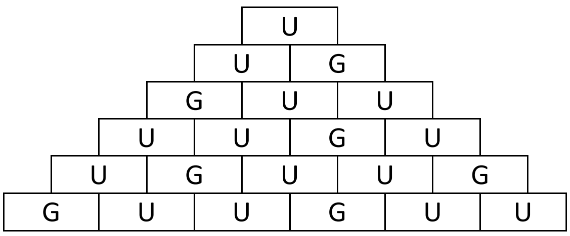
26. Paul möchte auf jeden Ziegel der abgebildeten Zahlenmauer eine positive ganze Zahl so schreiben, dass jede Zahl gleich der Summe der beiden Zahlen auf den unmittelbar darunterliegenden Ziegeln ist.



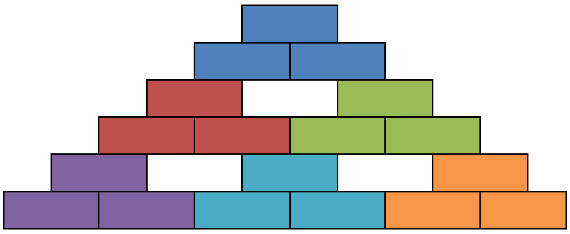
Wie viele ungerade Zahlen kann er höchstens auf die Ziegel schreiben?

(A) 13 **(B) 14** (C) 15 (D) 16 (E) 17

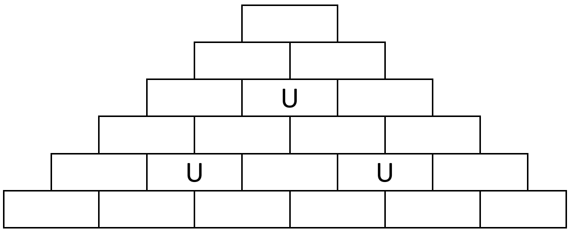
Die Summe zweier Zahlen ist genau dann ungerade, wenn eine der beiden Zahlen ungerade und die andere gerade ist. Eine gerade Zahl kann Summe von zwei geraden Zahlen oder zwei ungeraden Zahlen sein. Da Paul viele ungerade Zahlen schreiben möchte, ist der zweite Fall der bessere. Wir beschränken uns darauf, zu betrachten, ob Zahlen ungerade (U) oder gerade (G) sind. Wir beginnen an der Spitze mit einer ungeraden Zahl. Jede gerade Zahl ersetzen wir durch zwei ungerade Zahlen in der Zeile darunter. Jede ungerade Zahl ersetzen wir in der Zeile darunter durch eine ungerade Zahl und eine gerade. Dabei versuchen wir, möglichst wenige gerade Zahlen zu schreiben. Damit erhalten wir die folgende Lösung mit 14 ungeraden Zahlen.



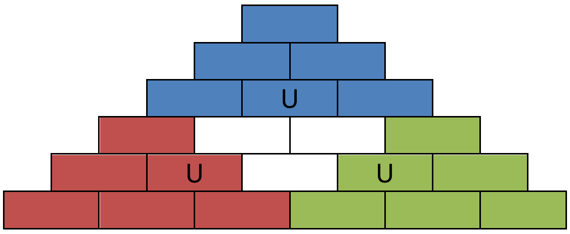
Um mathematisch korrekt zu beweisen, dass mehr als 14 ungerade Zahlen nicht möglich sind, kann man folgendes Argument verwenden. Wir unterteilen die Zahlenmauer in sechs kleine Zahlenmauern mit jeweils 3 Feldern (siehe Abbildung).



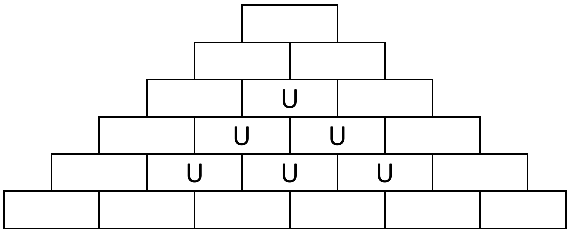
In jeder der kleinen Zahlenmauern können entweder ein oder drei gerade Zahlen stehen. Damit erhalten wir mindesten sechs gerade Zahlen. Da es insgesamt 21 Felder in der Zahlenmauer gibt, gibt es also höchstens 15 ungerade Zahlen. Lösungen (D) und (E) sind also ausgeschlossen. Da wir bereits eine Möglichkeit für (B) kennen, müssen wir nur noch (C) ausschließen.
Angenommen es gibt 15 ungerade und damit 6 gerade Zahlen. Dann steht in jeder der kleinen Zahlenmauern genau eine gerade Zahl, und in den drei weißen Felder, die zu keiner kleinen Zahlenmauer gehören, nur ungerade Zahlen, also so wie in dieser Abbildung:



Jetzt unterteilen wir die Zahlenmauer in drei mittlere Zahlenmauern mit 6 Feldern, wie in der Abbildung.



Es ist nicht möglich eine mittlere Zahlenmauer mit keiner oder nur einer geraden Zahl zu füllen. Also haben wir mindestens zwei gerade Zahlen pro mittlerer Zahlenmauer, insgesamt also mindestens 6. Wir haben angenommen, dass wir genau sechs gerade Zahlen haben, also kann in dem weißen Bereich keine gerade Zahl stehen. Damit haben wir folgende Zahlenmauer.



Das geht allerdings nicht, die Summe zweier ungerade Zahlen immer gerade ist. Widerspruch, unsere Annahme, dass es 15 ungerade Zahlen gibt, war also falsch.

27. Lisa zeichnet einige Punkte auf einem Kreis und verbindet sie der Reihe nach zu einem Vieleck. Sie addiert die Innenwinkel des Vielecks. Dabei lässt sie irrtümlich einen Winkel aus und erhält als Summe 2017°.

Wie groß ist der Winkel, den sie übersehen hat?

(A) 37° (B) 53° (C) 97° (D) 127° **(E)** 143°

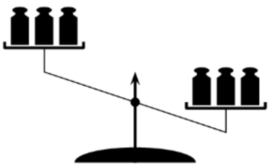
Ein konvexes n-Eck hat eine Innenwinkelsumme von $180 \cdot (n-2)°$. Da $11 \cdot 180 < 2017 < 12 \cdot 180$ gilt, fehlt der Winkel $(12 \cdot 180 - 2017)° = 143°$.

28. In einem Kreis stehen 30 Tänzer und blicken alle zur Mitte. Der Tanzlehrer ruft „Links“, und viele drehen sich um 90° nach links. Leider sind einige verwirrt und drehen sich nach rechts, sodass einige Tänzer jetzt einander direkt ansehen. Alle, die einander ansehen, schütteln den Kopf. Es stellt sich heraus, dass 10 Tänzer den Kopf schütteln. Darauf sagt der Tanzlehrer „Kehrt“ und alle drehen sich um 180° in die entgegengesetzte Richtung. Wieder schütteln alle, die einander direkt ansehen, den Kopf. Wie viele Tänzer schütteln beim zweiten Mal den Kopf?

(A) 10 (B) 20 (C) 8 (D) 15 (E) Es steht nicht eindeutig fest.

Zwischen je einem Paar, das einander direkt ansieht und dem nächsten solchen Paar stehen zwei Tänzer Rücken an Rücken. Und zwischen je einem Paar, das Rücken an Rücken steht und dem nächsten Paar, das Rücken an Rücke steht gibt es zwei Tänzer, die einander direkt ansehen.
Es gibt 5 Paare, die einander direkt ansehen, also auch 5 Paare, die Rücken an Rücken stehen. Nach dem Umdrehen sehen einander genau diese 5 Paare direkt an und diese 10 Tänzer schütteln den Kopf.

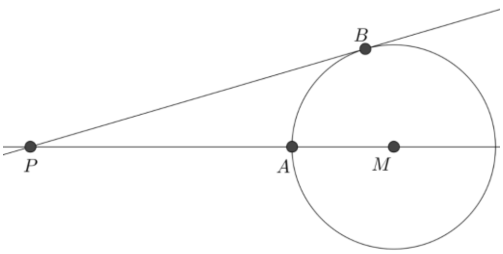
29. Auf jede Waagschale einer Balkenwaage werden zufällig drei Gewichte gelegt. Die Waage senkt sich, wie im Bild zu sehen ist, auf die rechte Seite. Die Massen der Gewichte betragen 101, 102, 103, 104, 105 und 106 Gramm. Bei wieviel Prozent der möglichen Verteilungen befindet sich das 106-Gramm-Gewicht auf der rechten (schwereren) Seite?



(A) 75 % (B) 80 % (C) 90 % (D) 95 % (E) 100 %

Wir betrachten die analoge Aufgabe mit Gewichten der Massen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Gramm, insgesamt also 21 Gramm. Auf der leichteren Seite stehen insgesamt höchstens 10 Gramm und es können nicht beide Seiten gleich schwer sein.
Wenn das 6-Gramm-Gewicht auf der leichteren Seite steht, dann haben die anderen beiden Gewichte auf der leichteren Seite zusammen eine Masse von höchstens 4 Gramm. Es gibt dafür also die Möglichkeiten 1 und 2 Gramm oder 1 und 3 Gramm.
Insgesamt gibt es $\binom{6}{3} \cdot \frac{1}{2} = 10$ Aufteilungen auf eine leichtere und eine schwerere Seite.
Damit ist das 6-Gramm-Gewicht in $\frac{8}{10} = 80\ \%$ der Fälle auf der schwereren Seite.

30. Die Punkte *A* und *B* liegen auf dem Kreis mit Mittelpunkt *M*. Der Punkt *P* liegt auf der Geraden durch *A* und *M*. *PB* berührt den Kreis in *B*. Die Längen der Strecken *PA* und *MB* sind ganze Zahlen, und es gilt *PB* = *PA* + 6. Wie viele mögliche Werte gibt es für *MB*?



(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

Da PB eine Tangente ist, ist der Winkel $\angle PBM = 90°$. Nach dem Satz von Pythagoras im Dreieck PBM gilt $PB^2 + BM^2 = PM^2$. Da $PB = PA + 6$ und $PM = PA + MB$ haben wir

$$(PA + 6)^2 + MB^2 = (PA + MB)^2.$$

Durch Ausquadrieren erhält man $6 \cdot PA + 18 = PA \cdot MB$. Wir dividieren durch PA und erhalten $6 + \frac{18}{PA} = MB$.
Da MB und PA ganze Zahlen sind, muss PA ein Teiler von 18 sein. Alle sechs Teiler von 18, also 1, 2, 3, 6, 9 und 18 liefern einen möglichen Wert für MB.