Känguru 2016 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. **Lösungsweg 1:** Tom und Johann sind zusammen 23 Jahre alt, Tom und Alex zusammen 25. Da das Alter von Tom in beiden Summen gleich ist, muss Alex also um 2 Jahre älter sein als Johann.

   Johann und Tom sind zusammen 23 Jahre alt, Johann und Alex zusammen 24. Hier ist das Alter von Johann in beiden Summen gleich, also muss Alex um ein Jahr älter sein als Tom.

   Daher ist **Alex** am ältesten.

   Lösungsweg 2: In diesem Lösungsweg erfahren sogar das genaue Alter aller drei Personen. Wir wenden den in vielen Situationen nützlichen Trick an, einfach alle drei Summen zusammenzuzählen. So erfahren wir, dass die Summe der Alter von Tom + Johann + Johann + Alex + Alex + Tom gleich 23 + 24 + 25 = 72 ist. Halbieren wir das, so wissen wir, dass die Summe der Alter von Alex + Johann + Tom gleich 36 ist.

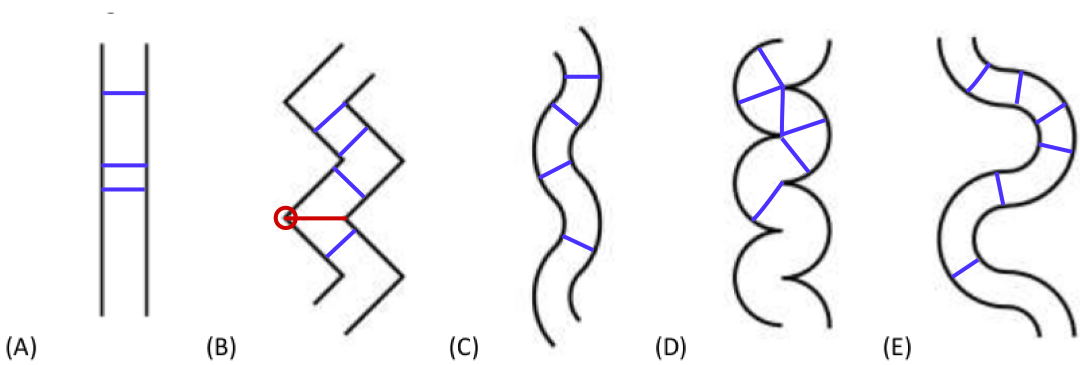
   Wenn Alex + Johann + Tom = 36 und laut Angabe Tom + Johann = 23 ist, dann ist Alex = 13.

   Auf dem gleichen Wege sehen wir Johann + Alex = 24 und daher Tom = 12, und schließlich Alex + Tom = 25 und daher Johann = 11.

   Also ist **Alex** am ältesten.

2. $$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}=\frac{100}{1000}+\frac{10}{1000}+\frac{1}{1000}=\mathbf{\frac{111}{1000}}$$

3. In der folgenden Skizze sind bei jedem Fluss von einigen Punkten aus die kürzesten Brücken ans andere Ufer eingezeichnet:

   Bei Flüssen (A), (C), (D) und (E) sind alle blauen Linien über den jeweiligen Fluss gleich lang. Bei **(B)** dagegen ist vom rot markierten Kreis aus die kürzestmögliche Brücke deutlich länger als die entlang der blauen Linien möglichen Brücken am gleichen Fluss.

4. **Lösungsweg 1:** Es gilt $2015 \cdot 2017 = 4064255$ und $2016 \cdot 2016 = 4064256$, daher gibt es **keine** Zahlen, die dazwischen liegen.

   Lösungsweg 2: Wenn wir die Multiplikation nicht ausrechnen wollen, können wir die Rechnung auch wie folgt vereinfachen: $2015 \cdot 2017 = (2016-1) \cdot (2016+1) = 2016^2 - 1$. Somit ist $2016 \cdot 2016$ nur um 1 größer als $2015 \cdot 2017$, daher gibt es **keine** Zahlen, die dazwischen liegen.

5. **Lösungsweg 1:** Wenn wir wissen, dass die Vertauschung der x- und y-Koordinaten einer Spiegelung entlang der Geraden $y = x$ entspricht, sehen wir sofort, dass **(A)** das Ergebnis ist.

   Lösungsweg 2: Wir betrachten für einige markante Punkte, wo sie nach der Vertauschung liegen.

   - Bei der Nase des Kängurus rechts oben sind x- und y-Koordinate ungefähr gleich groß, daher ändert sich durch die Vertauschung nicht viel. Die Nase bleibt also ungefähr an der gleichen Stelle rechts oben.
   - Auch bei der Schwanzspitze des Kängurus links unten sind x- und y-Koordinate beide ungefähr gleich, daher bleibt die Schwanzspitze ungefähr an der gleichen Stelle links unten.
   - Die Zehenspitzen des Kängurus rechts unten haben eine große x- und eine kleine y-Koordinate. Nach der Vertauschung ist die x-Koordinate klein und die y-Koordinate groß, also landen die Zehenspitzen links oben.

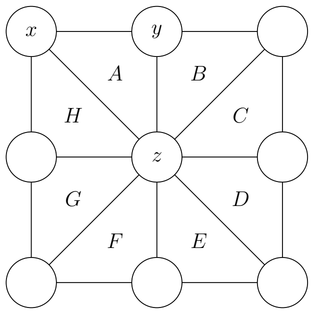
- Umgekehrt hat die leere Fläche über dem Rücken links oben kleine x- und große y-Koordinaten, daher sind nach der Vertauschung die x-Koordinaten groß und die y-Koordinaten klein, daher landet der leere Bereich rechts unten.

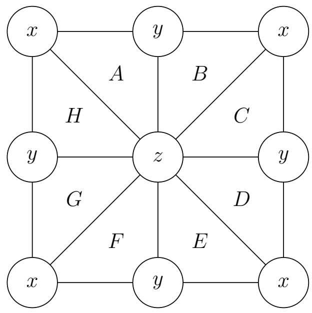
Daher stellt **(A)** das Känguru dar, dass wir nach der Vertauschung erhalten.

6. Bereits mit **4 Ebenen** ist es möglich, einen begrenzen Bereich einzugrenzen, beispielsweise einen Tetraeder (dreiseitige Pyramide).

   Es ist bekannt, dass 3 Ebenen dafür noch nicht genügen, was man etwa so argumentieren kann: Ein von Ebenen begrenzter Körper im dreidimensionalen Raum hat mehrere Ecken, wobei eine Ecke immer dort entsteht, wo 3 oder mehr Ebenen zusammenstoßen. Umgekehrt wissen wir aber, dass drei Ebenen einander in höchstens einem Punkt schneiden. Mit 3 Ebenen können wir also höchstens einen Eckpunkt bilden, was für einen begrenzten Körper zu wenig ist.

7. Wie in der ersten Zeichnung bezeichnen wir die Zahlen links oben, oben und in der Mitte mit x, y und z (wobei diese Zahlen nicht notwendigerweise verschieden sein müssen).





   Die Dreiecke A und B müssen dieselbe Summe haben. Dreieck A hat Summe $x + y + z$, Dreieck B hat Summe $y + z +$ [Ecke rechts oben], daher muss in der Ecke rechts oben ebenfalls die Zahl x stehen.

   Dreiecke B und C müssen dieselbe Summe haben, also steht rechts in der Mitte wieder y. Dreiecke C und D haben dieselbe Summe, also steht rechts unten sicher wieder x, und so weiter, bis wir gezeigt haben, dass die Zahlen so verteilt sind wie in der rechten Zeichnung.

   Es kommen also nur die Zahlen x, y und z vor, daher können nicht mehr als drei Zahlen auftreten. Umgekehrt können wir für x, y und z drei verschiedene Zahlen wählen und sehen, dass trotzdem immer noch alle 8 kleinen Dreiecke dieselbe Summe $x + y + z$ haben, also ist eine Lösung mit drei verschiedenen Zahlen möglich.

   Sie kann daher höchstens **3** verschiedene Zahlen verwenden.

8. Bezeichne A das kleine weiße Rechteck (mit Größe $x \times y$) links unten. Die beiden Rechtecke S_1 und S_2 dieselbe Fläche. Fügen wir zu beiden das kleine weiße Rechteck hinzu, so haben auch $S_1 + A$ und $S_2 + A$ dieselbe Fläche.

   Von diesen neuen Rechtecken sind die Flächen nun leicht zu berechnen: Das Rechteck $S_1 + A$ ist x breit und 5 hoch, also ist die Fläche gleich $x \cdot 5$. Das Rechteck $S_2 + A$ ist 8 breit und y hoch, also ist die Fläche gleich $8 \cdot y$.

   Die Flächen sind nach Angabe gleich groß, also gilt $5x = 8y$, was sich leicht umformen lässt (durch Division durch $5y$) zu $x : y =$ **$8 : 5$**.

9. Es soll $x^2 - 4x + 2 = 0$ gelten, was für $x = 0$ nicht erfüllt wäre, daher ist $x \neq 0$. Daher dürfen wir beide Seiten der Gleichung durch x dividieren und erhalten die äquivalente Gleichung $x - 4 + \frac{2}{x} = 0$. Addieren wir auf beiden Seiten 4, so erhalten wir $x + \frac{2}{x} =$ **4**.

10. Wir wissen, dass die Bogenlängen sich zueinander gleich verhalten wie die dazugehörigen Winkel zum Mittelpunkt, also $\sphericalangle AOP : \sphericalangle POB = 20 : 16 = 5 : 4$. Die Summe der beiden Winkel ist $180°$. Der Winkel $\sphericalangle POB$ macht daher $\frac{4}{9}$ davon aus und beträgt somit $80°$.

    Da die Tangente PX im Berührpunkt P normal auf den Radius PO steht, ist $\sphericalangle XPO$ ein rechter Winkel.

    Die Winkelsumme im Dreieck beträgt $180°$, daher bleiben für den gesuchten Winkel $\sphericalangle AXP = \sphericalangle OXP = 180° - \sphericalangle POX - \sphericalangle XPO = 180° - 80° - 90° =$ **$10°$** übrig.

11. Wir formen $a + 2 = b - 2$ um zu $a = b - 4$ und sehen, dass b um 4 größer ist als a.

Die dritte Gleichung $c \cdot 2 = d : 2$ formen wir um zu $c \cdot 4 = d$ und sehen, dass d vier Mal so groß ist wie c.

Nun müssen wir noch b und d vergleichen, daher formen wir $b-2 = d : 2$ um zu $d = 2b-4 = b+b-4 = b+a$. Daher ist d so groß wie a und b zusammen und somit die größte Zahl.

12. Seien a, b und c die Zahlen in der untersten Reihe. Dann stehen in der mittleren Reihe die Zahlen ab und bc, und oben steht die Zahl ab^2c. Es können daher nur solche Zahlen oben stehen, die sich als solches Produkt darstellen lassen.

Betrachten wir die 5 Lösungsmöglichkeiten, so sehen wir, dass diese Darstellung bei vier davon möglich ist, während bei einer nicht genügend Primfaktoren dafür zur Verfügung stehen:

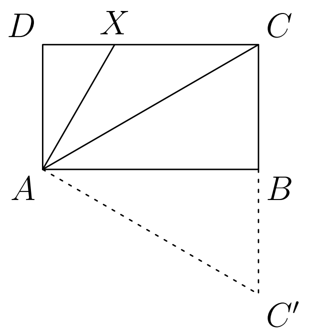
(A) $56 = 2 \cdot 2^2 \cdot 7$ (B) $84 = 3 \cdot 2^2 \cdot 7$ (C) $84 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ **(D)** $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ (E) $220 = 5 \cdot 2^2 \cdot 11$

13. Wir berechnen den Wert unter Anwendung der Rechenregeln für Potenzen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\\
x_2 &= 2^2\\
x_3 &= \left(2^2\right)^{\left(2^2\right)} = 2^{2\cdot 2^2} = 2^{2^{2+1}} = 2^{2^3}\\
x_4 &= \left(2^{2^3}\right)^{\left(2^{2^3}\right)} = 2^{2^3\cdot 2^{2^3}} = 2^{2^3\cdot 2^8} = 2^{2^{3+8}} = \mathbf{2^{2^{11}}}
\end{aligned}$$

14. Da BC genau halb so lang ist wie AC, ist ABC genau die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks $AC'C$. In diesem beträgt jeder Winkel 60°, also insbesondere $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Als Ergänzung auf den rechten Winkel des Rechtecks erhalten wir weiters $\sphericalangle DCA = 90^\circ - \sphericalangle ACB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Wegen $XA = XC$ ist das Dreieck AXC gleichschenkelig, damit gilt weiters $\sphericalangle CAX = \sphericalangle ACX = \mathbf{30^\circ}$.



15. Da die Gesamtfläche 2016 und die Anzahl der Quadrate 56 bereits vorgegeben sind, muss jedes der Quadrate die Fläche $\frac{2016}{56} = 36$ haben, und somit die Seitenlänge 6. Unabhängig von der ursprünglichen Form des Rechtecks sehen die Quadrate also immer gleich aus.

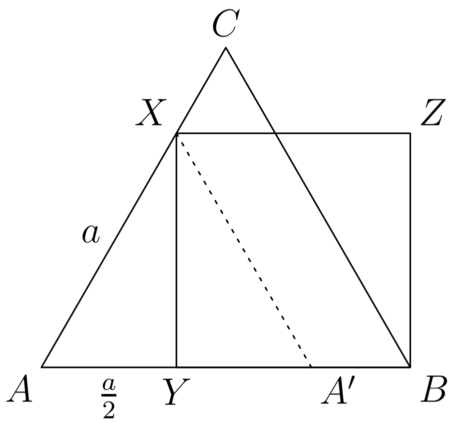
Daher müssen wir nur noch berechnen, auf wieviele Arten diese 56 Quadrate wieder zu einem Rechteck zusammengelegt werden können. Wenn das erhaltene Rechteck n Quadrate breit ist, muss es $\frac{56}{n}$ Quadrate hoch sein, wobei sowohl n als auch $\frac{56}{n}$ ganze Zahlen sein müssen. Wir können für n daher alle Teiler von 56 wählen: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56. Jeweils 2 dieser Rechtecke haben nach Drehung dieselbe Form (zum Beispiel $4 \times \frac{56}{4} = 4 \times 14$ und $14 \times \frac{56}{14} = 14 \times 4$), also gibt es 4 verschiedene Formen.

16. Wir beschriften die Punkte wie in der Zeichnung. Das Quadrat hat einen Umfang von 4, also eine Seitenlänge von 1.

Bezeichne a den Abstand AX. Das Dreieck AXY hat einen rechten Winkel und einen Winkel von 60°, daher ist es genau die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks $AA'X$ mit Höhenfußpunkt Y. Somit beträgt der Abstand AY gleich $\frac{a}{2}$.

Im rechtwinkeligen Dreieck AXY gilt nach Pythagoras, dass $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1^2 = a^2$, was sich umformen lässt (durch Multiplikation mit 4) zu $a^2 + 4 = 4a^2$, und somit weiters zu $a^2 = \frac{4}{3}$ und $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Die gesamte Länge AB beträgt daher $BY + YA = 1 + \frac{a}{2} = 1 + \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Das dreifache davon ergibt einen Umfang von $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3 + \frac{3}{\sqrt{3}} = \mathbf{3 + \sqrt{3}}$.



17. Ein Ritter sagt immer die Wahrheit, daher muss jeder Ritter gemäß seiner eigenen Aussage zwischen zwei Lügnern sitzen. Daher können wir höchstens 3 Ritter am Lagerfeuer unterbringen, weil bei 4 oder mehr Rittern zwei davon benachbart sitzen würden.

    Wenn ein Lügner behauptet, er würde zwischen zwei Lügnern sitzen, dann muss mindestens einer seiner Sitznachbarn in Wirklichkeit ein Ritter sein, da der Lügner ja sonst die Wahrheit gesagt hätte. Daher können nie mehr als 2 Lügner in einer Reihe nebeneinander sitzen. Deshalb können höchstens 4 Lügner am Lagerfeuer sitzen, da bei 5 oder mehr Lügnern auf jeden Fall irgendwo drei davon in einer Reihe nebeneinander sitzen müssten.

    Deshalb sitzen am Lagerfeuer genau 3 Ritter und **4 Lügner**.

18. Wir wissen, dass die Ziffernsumme einer Zahl bei Division durch 9 den gleichen Rest haben muss wie die Zahl selbst. Wenn wir drei dreistellige Zahlen $[abc]$, $[def]$ und $[ghi]$ betrachten, dann hat $[abc]$ den gleichen Rest bei Division durch 9 wie $a+b+c$, $[def]$ hat den gleichen Rest wie $d+e+f$, und $[ghi]$ hat den gleichen Rest wie $g+h+i$.

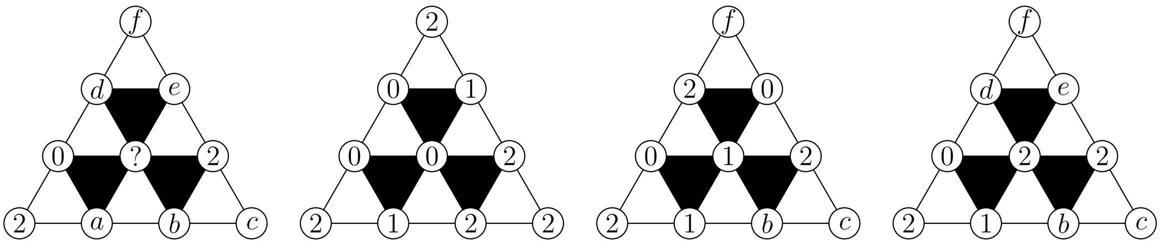
    Addiert man diese Zahlen, so hat auch die Summe $[abc]+[def]+[ghi]$ den gleichen Rest bei Division durch 9 wie $a+b+c+d+e+f+g+h+i$. Die Summe $a+b+c+d+e+f+g+h+i$ kennen wir aber, da laut Angabe ja jede der Ziffern von 1 bis 9 genau ein Mal darin vorkommt, also $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 = 5 \cdot 9$.

    Daher gilt für die Summe $[abc]+[def]+[ghi]$ sicher, dass auch diese durch 9 teilbar ist. Für die Zahl 1500 gilt dies nicht, daher kann sie nicht das Ergebnis einer solchen Summe sein.

    Der Umkehrschluss gilt nicht, daher müssen wir für die anderen Zahlen erst zeigen, dass sie als solche Summe dargestellt werden können. Wir finden für die vier vorgegebenen Zahlen die folgenden Beispiele:

    (B) $1503 = 316 + 428 + 759$
    (C) $1512 = 315 + 428 + 769$
    (D) $1521 = 214 + 538 + 769$
    (E) $1575 = 231 + 465 + 879$

19. Wir bezeichnen die Zahlen wie in der ersten Skizze. Wir müssen auf jeden Fall $a = 1$ setzen, damit die Summe im linken unteren weißen Dreieck durch 3 teilbar ist.



    Wenn wir $? = 0$ setzen, so erhalten wir die Lösung, die in der zweiten Skizze abgebildet ist und deren Korrektheit wir leicht überprüfen können.

    Wenn wir $? = 1$ setzen wie in der dritten Skizze, so müssen wir $d = 2$ setzen für das weiße Dreieck links auf halber Höhe. Für das weiße Dreieck rechts auf halber Höhe müssen wir $e = 0$ setzen. Dann ist aber die Summe beim oberen schwarzen Dreieck durch 3 teilbar, also ist diese Lösung nicht möglich.

    Wenn wir $? = 2$ setzen wie in der vierten Skizze, dann ist die Summe beim linken unteren schwarzen Dreieck durch 3 teilbar, also ist auch diese Lösung nicht möglich.

    Eine gültige Lösung können wir daher **nur für 0** erhalten.

20. Da die fünf Winkel x zusammen $180°$ betragen, gilt $x = 36°$.

    Auf Grund der Symmetrie ist BE parallel zu der Tangente. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt $180°$, daher ist $\sphericalangle ABE = \frac{180°-3x}{2} = 36° = x$.

    Der Peripheriewinkelsatz besagt, dass eine Sehne von jedem Punkt des Kreises aus unter demselben Winkel erscheint. Über der Sehne ED beispielsweise gilt $\sphericalangle EBD = \sphericalangle EAD = x$.

    Der Winkel $\sphericalangle ABD$ beträgt daher $\sphericalangle ABE + \sphericalangle EBD = 2x =$ **72°**.

21. Für reelle Zahlen a und b gibt es folgende Fälle, in denen $a^b = 1$ gilt:

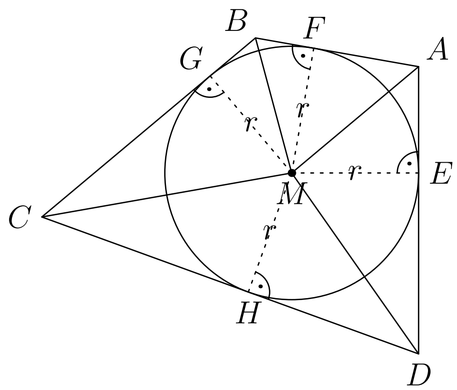
- $a = 1$, b beliebig: Für $a = x^2 - 4x + 5 = 1$ erhalten wir die Doppellösung $x_1 = x_2 = 2$.
- $a = -1$, b ganzzahlig gerade: $a = x^2 - 4x + 5 = -1$ ist äquivalent zu $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 = 0$, was keine Lösung hat.
- a beliebig ungleich 0, $b = 0$: Für $b = x^2 + x - 30 = 0$ erhalten wir die beiden Lösungen $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 30} = \frac{-1\pm 11}{2}$. Der Term $a = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ kann nie 0 werden, daher sind beide tatsächlich Lösungen.

Wir haben daher insgesamt **3** Lösungen gefunden.

22. Seien wie in der Zeichnung A, B, C und D die Eckpunkte des Tangentenvierecks, E, F, G und H die Berührpunkte des Inkreises, und M der Mittelpunkt des Inkreises. Weiters sei r der Radius des Inkreises.

Der Umfang des Vierecks berechnet sich als $U_\square = AB + BC + CD + DA$, der Umkreis des Kreises als $U_\bigcirc = 2r\pi$. Das Verhältnis der Umfänge ist also

$$\frac{U_\square}{U_\bigcirc} = \frac{AB + BC + CD + DA}{2r\pi} \qquad .$$



Für die Berechnung der Fläche zerlegen wir das Tangentenviereck in vier Dreiecke. Für jedes dieser Dreiecke berechnet sich die Fläche als "$\frac{\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe}}{2}$", also erhalten wir die Gesamtfläche

$$A_\square = \frac{AB\cdot r}{2} + \frac{BC\cdot r}{2} + \frac{CD\cdot r}{2} + \frac{DA\cdot r}{2} = \frac{(AB + BC + CD + DA)\cdot r}{2} \qquad .$$

Die Fläche des Kreises berechnet sich als $A_\bigcirc = r^2\pi$.

Für das Verhältnis der Flächen erhalten wir somit

$$\frac{A_\square}{A_\bigcirc} = \frac{\frac{(AB+BC+CD+DA)\cdot r}{2}}{r^2\pi} = \frac{AB + BC + CD + DA}{2r\pi} = \frac{U_\square}{U_\bigcirc}.$$

Somit gilt sogar in jedem beliebigen Tangentenviereck die Gleichung $A_\square : A_\bigcirc = U_\square : U_\bigcirc$. Für das Tangentenviereck aus der Angabe folgt also $A_\square : A_\bigcirc = U_\square : U_\bigcirc =$ **4 : 3**.

23. Zunächst wissen wir, dass eine quadratische Funktion bei jeder x-Koordinate nur einen Wert annehmen kann, also kann die Funktion immer nur durch höchstens einen von drei direkt übereinander angeordneten Punkten verlaufen. Wenn die Funktion durch drei der markierten Punkte gehen soll, muss sie also aus jeder der drei übereinanderliegenden Gruppen genau einen Punkt enthalten. Es gibt $3\cdot 3\cdot 3 = 27$ verschiedene Möglichkeiten, aus jeder dieser drei Gruppen genau einen Punkt auszuwählen.

Weiters wissen wir, dass eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ dann und nur dann drei Punkte in einer geraden Linie enthält, wenn $a = 0$ ist. (Begründung: Mit 3 Punkten ist eine quadratische Funktion eindeutig bestimmt. Eine lineare Funktion ist ein Sonderfall einer quadratischen Funktion, bei der x^2 den Koeffizienten 0 hat. Da es durch 3 auf einer Geraden liegenden Punkte eine lineare Funktion gibt, ist diese die einzige "quadratische" Funktion durch diese Punkte.) Dies schließt 5 Fälle aus: Die 3 unteren Punkte, die 3 mittleren Punkte, die 3 oberen Punkte, die Diagonale von links unten nach rechts oben, und die Diagonale von links oben nach rechts unten.

Für die verbleibenden **22 Möglichkeiten** können wir Beispiele finden, von denen einige in der Grafik zu sehen sind und der Rest durch Spiegelungen und Verschiebungen erhalten werden kann:

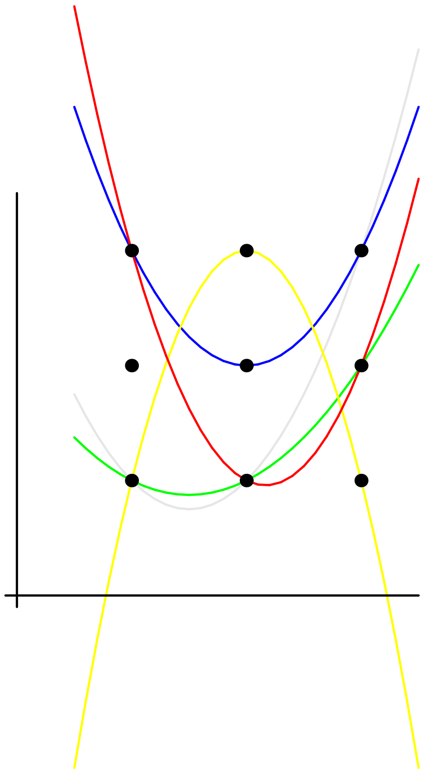
(a) 8 Möglichkeiten ähnlich der grünen Linie, bei der zwei benachbarte Punkte auf der gleichen Höhe sind und der dritte Punkt um 1 höher oder tiefer.

(b) 4 Möglichkeiten ähnlich der grauen Linie, bei der zwei benachbarte Punkte auf der gleichen Höhe sind und der dritte Punkt um 2 höher oder tiefer.

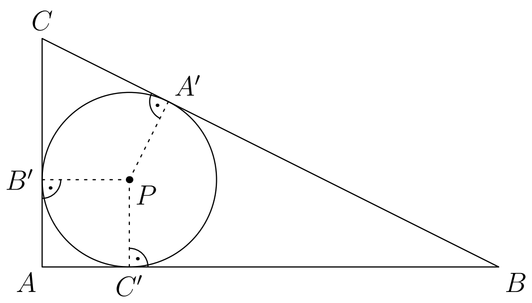
(c) 4 Möglichkeiten ähnlich der blauen Linie, bei der die zwei äußeren Punkte auf der gleichen Höhe sind und der mittlere Punkt um 1 höher oder tiefer.

(d) 2 Möglichkeiten ähnlich der gelben Linie, bei der die zwei äußeren Punkte auf der gleichen Höhe sind und der mittlere Punkt um 2 höher oder tiefer.

(e) 4 Möglichkeiten ähnlich der roten Linie, bei denen alle drei Punkte auf verschiedenen Höhen sind.



24. Beim Schnittpunkt zweier Winkelsymmetralen eines Dreiecks handelt es sich um den Inkreismittelpunkt, daher ist der gegebene Abstand von $\sqrt{8}$ zwischen P und der Hypotenuse BC gleichzeitig der Inkreisradius. Diesen finden wir wieder bei den Abständen zu den Fußpunkten B' und C' von P auf die Seiten AC und AB. Somit haben wir ein kleines Quadrat $AC'PB'$ mit Seitenlänge $\sqrt{8}$. Gesucht ist die Diagonale AP dieses Quadrats, die sich demnach berechnet als $AP = \sqrt{2} \cdot B'P = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = \mathbf{4}$.



25. Seien x_1 und x_2 die beiden Lösungen von $x^2 + ax + b = 0$. Gemäß Satz von Vieta gilt $a = -x_1 - x_2$ und $b = x_1x_2$. Falls wir den Satz von Vieta gerade nicht zur Hand haben, können wir es auch ausrechnen:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \\
x_1 + x_2 &= -\frac{a}{2} + \sqrt{\ldots} - \frac{a}{2} - \sqrt{\ldots} = -a \\
x_1x_2 &= \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\ldots}\right) \cdot \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{\ldots}\right) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = b
\end{aligned}$$

Durch geschickte Kombination erhalten wir $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-a)^2 - 2b = a^2 - 2b$.

Mit der gleichen Methode erhalten wir aus der Gleichung $x^2 + bx + a = 0$ mit den Lösungen y_1 und y_2 die Gleichheit $y_1^2 + y_2^2 = b^2 - 2a$.

Gemäß der Angabe ist die Summe der Quadrate gleich groß, also $a^2 - 2b = x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = b^2 - 2a$. Dies formen wir um:

$$\begin{aligned}
a^2 - 2b &= b^2 - 2a && \Big| -b^2 + 2b \\
a^2 - b^2 &= -2a + 2b \\
(a+b)(a-b) &= -2(a-b) && \Big| : (a-b) \neq 0 \\
a + b &= \mathbf{-2}
\end{aligned}$$

wobei wir die Division durch $(a - b)$ deshalb durchführen dürfen, da laut Angabe $a \neq b$ gilt.

26. Sei s die Seitenlänge des Würfels. Das Volumen einer Pyramide berechnet sich als „$\frac{\text{Grundfläche}\cdot\text{Höhe}}{3}$". Wir betrachten die Volumina der Pyramiden über zwei gegenüberliegenden Flächen. Sei h die Höhe der einen Pyramide, dann hat die gegenüberliegende Pyramide die Höhe $s-h$. Beide Pyramiden haben eine Grundfläche von s^2. Die Summe der Volumina beträgt also $\frac{s^2\cdot h}{3}+\frac{s^2\cdot(s-h)}{3}=\frac{s^2}{3}\cdot(h+s-h)=\frac{s^3}{3}$. Diese Summe ist nicht von der Lage des Punktes P abhängig.

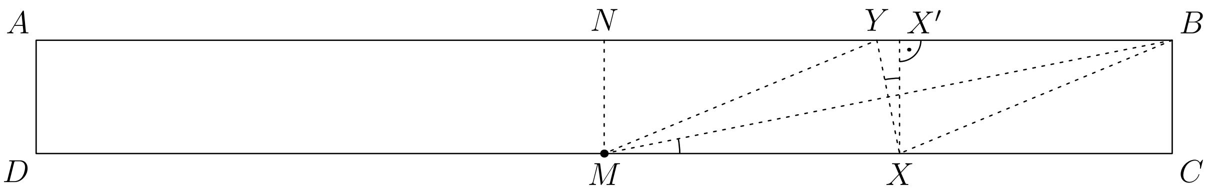
    Daraus folgt, dass wir die 6 Pyramiden zu 3 Paaren zusammenfassen können, die jeweils in Summe das gleiche Volumen haben. Nun bleibt nur noch zu klären, welche der vorgegebenen Pyramiden zu Paaren zusammengehören. Es ist klar, dass von den 6 Pyramiden die größte mit der kleinsten ein Paar bildet, die zweitgrößte mit der zweitkleinsten und die drittgrößte mit der drittkleinsten.

    Nehmen wir an, die fehlende Pyramide hätte ein Volumen x kleiner als 2, dann wären die Paare $\{x,14\}$, $\{2,11\}$ und $\{5,10\}$. Aber $2+11\neq 5+10$.

    Hätte die fehlende Pyramide ein Volumen x größer als 14, so wären die Paare $\{2,x\}$, $\{5,14\}$ und $\{10,11\}$. Aber $5+14\neq 10+11$.

    Daher hat die fehlende Pyramide ein Volumen x zwischen 2 und 14. Somit bilden die Pyramiden mit den Volumen 2 und 14 ein Paar, daher hat jedes Paar zusammen ein Volumen von 16. Daher bildet 5 ein Paar mit 11, und der Pyramide mit Volumen 10 fehlt ihr Gegenüber mit dem Volumen **6**.

27. Bei dieser Aufgabe ist die Berechnung selbst für den Zweck des Wettbewerbs relativ leicht. Will man allerdings mathematisch ganz sauber argumentieren, warum gewisse Figuren ähnlich oder kongruent sind, so brauchen einige Schritte etwas längere Ausführungen. Da das Ziel dieser Lösungssammlung auch ist zu zeigen, wie eine klare Beweisführung erfolgen könnte, mag die folgende Erklärung etwas umfangreicher erscheinen, als zum reinen Ausrechnen notwendig wäre. Für den Känguru-Bewerb an sich würde es natürlich völlig ausreichen zu erkennen, dass durch die Faltung alles symmetrisch ist.

    Seien X und Y die Endpunkte der ersten Faltlinie auf CD bzw. AB wie in der Zeichnung zu sehen. Die weiße Fläche am Ende ist genau doppelt so groß wie die Fläche des Dreiecks MNY, daher berechnen wir nur diese Fläche.

    Nach dem Falten liegt das Dreieck YBX genau auf YMX, daher ist $YB=YM$ und $XB=XM$, und außerdem $\sphericalangle YBX=\sphericalangle YMX$. Die Seiten AB und CD sind parallel, daher gilt nach Parallelwinkelsatz $\sphericalangle ABX=\sphericalangle BXC$. Zusammengesetzt ergibt das $\sphericalangle YMC=\sphericalangle BXC$, das heißt, dass MY und XB denselben Winkel zu CD einschließen und daher zueinander parallel sind. Als Seitenteile des Rechtecks sind auch MX und YB zueinander parallel. Insgesamt haben wir damit also bewiesen, dass $MXBY$ eine Raute ist.

    Sei X' der Fußpunkt der Höhe von X auf AB. Wir bezeichnen den Winkel $\sphericalangle BMX$ mit α. In einer Raute stehen die Diagonalen normal aufeinander, daher folgt aus der Winkelsumme im Dreieck zwischen M, X und dem Mittelpunkt der Raute, dass $\sphericalangle MXY=180°-90°-\sphericalangle BMX=90°-\alpha$. Der Winkel $\sphericalangle MXX'$ beträgt $90°$, daher bleibt für den Winkel $\sphericalangle X'XY=90°-\sphericalangle MXY=90°-(90°-\alpha)=\alpha$. Daraus folgt, dass die Dreiecke MCB und $XX'Y$ zueinander ähnlich sind, da sie die gleichen Winkel haben.

    Aus der Ähnlichkeit folgt nun $YX':X'X=BC:CM=5:25=1:5$. Da XX' als Breite des Streifens eine Länge von 5 hat, hat YX' folglich eine Länge von 1.

    Für $NY+X'B$ bleibt also eine Länge von 24 übrig. Wegen $NY=NB-YB=MC-MX=XC=X'B$ sind die beiden Teile links und rechts von YX' gleich lang, also $NY=X'B=12$.

    Für das Dreieck MNY ergibt sich eine Fläche von $\frac{MN\cdot NY}{2}=\frac{5\cdot 12}{2}=30$, und für beide Hälften zusammen somit die gesuchte Fläche von **60**.

28. Die Summe der Zahlen von 1 bis n berechnet sich als $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Wenn p diese Summe teilen soll, muss also p entweder ein Teiler von n oder ein Teiler von $n+1$ sein. Laut Angabe teilt p nicht n, daher ist p ein Teiler von $n+1$.

    Jeder Teiler einer Zahl ist kleiner oder gleich als die Zahl selbst. Wäre p kleiner als $n+1$, so wäre p eine Zahl zwischen 1 und n und somit insbesondere ein Teiler dieser Zahl, was laut Angabe ebenfalls ausgeschlossen ist. Daher ist $p = n + 1$.

    Wir suchen also eine Zahl n, für die $n+1$ eine Primzahl ist und $n+n+1 = 2n+1$ einen der fünf vorgegebenen Werte annimmt. Darauf überprüfen wir die fünf möglichen Werte:

    A $217 = 108 + 109$: 109 ist eine Primzahl

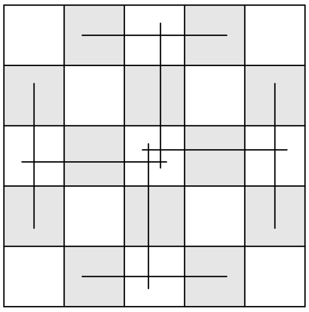
    B $221 = 110 + 111 = 110 + 3 \cdot 37$

    C $229 = 114 + 115 = 114 + 5 \cdot 23$

    D $245 = 122 + 123 = 122 + 3 \cdot 41$

    E $269 = 134 + 135 = 134 + 5 \cdot 27$

29. Hier eine Lösung mit 8 Zügen, also **weniger als 10**:



30. Eine Zahl n mit Primfaktorenzerlegung $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k}$ hat $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha_k+1)$ Teiler (da jeder Primfaktor p_i zwischen 0 und α_i oft verwendet werden kann).

    Wenn $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha_k+1) = 6$ gilt, gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder $k = 1$ und $\alpha_1 = 5$, oder $k = 2$, $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 2$. (Für $k \geq 3$ gäbe es immer mindestens 8 Teiler.)

    Im ersten Fall hätte n die Form p^5 und somit die Teiler 1, p, p^2, p^3, p^4 und p^5. Das Produkt von 5 dieser Teiler hätte daher die Form p^x für eine Primzahl p und eine ganze Zahl x. Aber $648 = 2^3 \cdot 3^4$ hat zwei verschiedene Primfaktoren.

    Daher muss der andere Fall gelten, also $n = pq^2$ mit zwei verschiedenen Primzahlen p und q. Die sechs Teiler sind 1, p, q, pq, q^2, pq^2.

    Multipliziert man alle 6 Teiler, so erhält man p^3q^6, also eine Zahl mit 9 Primfaktoren. Das gegebene Produkt 648 von 5 dieser 6 Teiler enthält 7 Primfaktoren, daher hat der noch fehlende Teiler zwei Primfaktoren. Es fehlt also entweder der Teiler pq oder der Teiler q^2.

    Wenn der Teiler pq fehlen würde, wäre das Produkt der restlichen 5 Teiler gleich $1 \cdot p \cdot q \cdot q^2 \cdot pq^2 = p^2 \cdot q^5$, das passt von den Hochzahlen her aber nicht zu $648 = 2^3 \cdot 3^4$.

    Daher fehlt der Teiler q^2. Das Produkt der restlichen 5 Teiler ist $1 \cdot p \cdot q \cdot pq \cdot pq^2 = p^3 \cdot q^4 = 648 = 2^3 \cdot 3^4$, also $p = 2$ und $q = 3$. Der fehlende Teiler hat daher den Wert $q^2 = 3^2 = \mathbf{9}$.