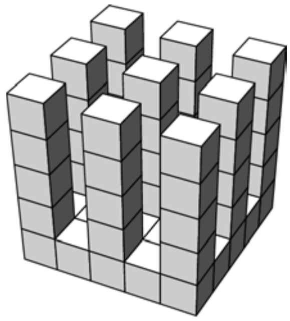
Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 20.3.2014

- 3 Punkte Beispiele -

1. Entfernt man von einem 5×5×5 Würfel einige 1×1×1 Würfel, erhält man den abgebildeten Körper. Dieser besteht aus einigen gleich hohen Säulen, die auf einer gemeinsamen Grundplatte stehen. Wie viele kleine Würfel werden entfernt?



(A) 56 (B) 60 **(C) 64** (D) 68 (E) 80

In jeder der oberen vier Ebenen entfernt man 16 Würfel, insgesamt also 4·16 = 64 Würfel.
Oder: In der unteren Ebene bleiben 25 Würfel über, und die 9 Säulen enthalten je 4 Würfel. Also bleiben 25 + 4·9 = 25 + 36 = 61 Würfel übrig. Ursprünglich waren 5·5·5 = 125 Würfel im großen Würfel, also wurden 125 – 61 = 64 Würfel entfernt.

2. Heute haben Carmen, Gerda und Sabine Geburtstag. Die Summe ihrer Alter ist jetzt 44. Wie groß wird die Summe ihrer Alter sein, wenn sie zum nächsten Mal eine zweiziffrige Zahl mit zwei gleichen Ziffern ist?

(A) 55 (B) 66 **(C) 77** (D) 88 (E) 99

Die Summe ihrer Alter wächst jedes Jahr um 3: In einem Jahr werden sie zusammen 47 Jahre alt sein, im Jahr darauf 50, et cetera. Also ist die Summe nach einem Jahr um 3 größer, nach zwei Jahren um 6, nach drei Jahren um 9, et cetera. Andererseits muss die Summe aber um ein Vielfaches von 11 vergrößert werden, um wieder eine zweiziffrige Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu erhalten. Die erste durch 11 teilbare Zahl, die in der 3er-Reihe vorkommt, ist 33, also muss die Summe um 33 vergrößert werden.

3. Wie groß ist der Wert von a^{-3k}, wenn $a^k = \frac{1}{2}$ gilt?

(A) $\frac{1}{8}$ **(B) 8** (C) –8 (D) 6 (E) $\frac{1}{6}$

$$a^{-3k} = \left(a^k\right)^{-3} = \left(\left(a^k\right)^{-1}\right)^3 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^3 = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3 = 8$$

4. In drei verschieden großen Körben liegen insgesamt 48 Bälle. Im kleinsten und größten Korb liegen zusammen doppelt so viele Bälle wie im mittleren. Im kleinsten Korb liegen halb so viele Bälle wie im mittleren. Wie viele Bälle liegen im größten Korb?

(A) 16 (B) 20 **(C) 24** (D) 30 (E) 32

Im kleinen und großen Korb gemeinsam liegen also zwei Drittel aller Bälle. (Sei *x* die Anzahl der Bälle im mittleren Korb, dann enthalten der große und kleine Korb gemeinsam 2*x* Bälle. Also gibt es insgesamt 3*x* Bälle.) Im mittleren Korb ist daher ein Drittel der Bälle, also 16. Da im kleinen Korb halb so viele Bälle sind wie im mittleren, sind es 8 Bälle. Somit bleiben 48 – 16 – 8 = 24 Bälle für den großen Korb übrig.

5. $\dfrac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = ?$

(A) 2^{2011} (B) 2^{2012} (C) 2^{2013} (D) 1 **(E) 2**

$$\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = \frac{2^{2013} \cdot (2-1)}{2^{2012} \cdot (2-1)} = \frac{2^{2013}}{2^{2012}} = 2$$

Oder:

$$\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = 2 \cdot \frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2 \cdot (2^{2013} - 2^{2012})} = 2 \cdot \frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2014} - 2^{2013}} = 2 \cdot 1 = 2$$

6. Welcher der folgenden Ausdrücke enthält den Faktor $b + 1$ nicht?

(A) $2b + 2$ (B) $b^2 - 1$ (C) $b^2 + b$ (D) $-1 - b$ **(E) $b^2 + 1$**

(A) $2b + 2 = 2(b + 1)$ (B) $b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$ (C) $b^2 + b = b(b + 1)$ (D) $-1 - b = -(b + 1)$

E: $b^2 + 1$ ist nicht reduzierbar. zB für $b = 3$ ist $b^2 + 1 = 10$ und $b + 1 = 4$, aber 4 ist kein Faktor von 10.

7. Wie viele Ziffern hat das Ergebnis der Rechnung $\left(2^{22}\right)^5 \cdot \left(5^{55}\right)^2$?

(A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 **(E) 111**

$$(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2 = 2^{22\cdot 5} \cdot 5^{55\cdot 2} = 2^{110} \cdot 5^{110} = 10^{110}$$

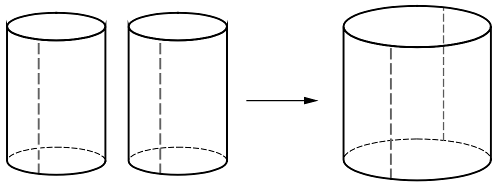
Das Ergebnis ist also ein 1er gefolgt von 110 Nullen, zusammen also 111 Ziffern.

8. Der fesche Fritz hat eine geheime E-Mail-Adresse, die nur vier seiner Freunde kennen. Heute erhielt er auf dieser Adresse acht E-Mails. Welche der folgenden Aussagen ist sicher richtig?

(A) Fritz hat von jedem Freund zwei E-Mails erhalten.
(B) Fritz kann nicht von einem Freund acht E-Mails erhalten haben.
(C) Fritz hat von jedem Freund mindestens ein E-Mail erhalten.
(D) Fritz hat von einem seiner Freunde mindestens zwei E-Mails erhalten.
(E) Fritz hat von mindestens zwei seiner Freunde mindestens zwei E-Mails erhalten.

Gegenbeispiel zu (A), (B), (C) und (E): Alle acht E-Mails stammen von einem Freund.
Nehmen wir an, (D) wäre falsch, also Fritz hätte von jedem Freund höchstens ein E-Mail erhalten. Dann hätte er insgesamt höchstens fünf E-Mails erhalten können. Also kann (D) nicht falsch sein.

9. Zwei identische Zylindermäntel werden wie abgebildet längs der senkrechten strichlierten Linien aufgeschnitten und dann zu einem großen Zylindermantel zusammengeklebt. Was kann man über das Volumen des resultierenden Zylinders im Vergleich zum Volumen eines kleinen Zylinders sagen?



(A) Es ist 2-mal so groß. (B) Es ist 3-mal so groß.
(C) Es ist π-mal so groß. **(D) Es ist 4-mal so groß.**
(E) Es ist 8-mal so groß.

Bezeichne r den Radius des kleinen Zylinders und R den Radius des großen Zylinders. Der Umfang U des großen Zylinders ist doppelt so groß wie der Umfang u des kleinen Zylinders, also muss auch sein Radius doppelt so groß sein: $2R\pi = U = 2u = 2(2r\pi)=4r\pi \Rightarrow R = 2r$

Für die Volumen v bzw. V gilt also: $V = R^2\pi h = (2r)^2 \pi h = 4r^2\pi h = 4v$

10. In der Jahreszahl 2014 sind alle Ziffern verschieden, und die letzte Ziffer ist größer als die Summe der anderen drei Ziffern. Vor wie vielen Jahren war dies zuletzt der Fall?

(A) 5 (B) 215 **(C) 305** (D) 395 (E) 485

Wir betrachten, von oben beginnend, einige Intervalle von Zahlen:

2010 bis 2013: Die Summe der ersten 3 Ziffern genau 3, also müsste die vierte Ziffer mindestens 4 sein.
2000 bis 2009: Die zweite und dritte Ziffer sind gleich.
1900 bis 1999: Bereits die Summe der ersten beiden Ziffern ist 10, die vierte Ziffer müsste also mindestens 11 sein. So eine Ziffer gibt es nicht.
1800 bis 1899: Bereits die Summe der ersten beiden Ziffern ist 9, die vierte Ziffer müsste also mindestens 10 sein. So eine Ziffer gibt es nicht.
1700 bis 1799: Die Summe der ersten beiden Ziffern ist 8. Falls die dritte Ziffer größer als 0 ist, ist die Summe der ersten drei Ziffern mindestens 9, also müsste die vierte Ziffer mindestens 10 sein, was nicht möglich ist. Falls die dritte Ziffer 0 ist, so erhalten wir die einzige mögliche Lösung in diesem Intervall, nämlich 1709. Dieses Jahr liegt 305 Jahre zurück.

- 4 Punkte Beispiele -

11. Eine quaderförmige Schachtel hat die Maße $a \times b \times c$ mit $a < b < c$. Vergrößert man a oder b oder c um 5 cm, vergrößert sich auch das Volumen der Schachtel. Wann ist die Zunahme am größten?

(A) Wenn man *a* vergrößert. (B) Wenn man b vergrößert.
(C) Wenn man c vergrößert. (D) Die Antwort ist von den Werten von a, b und c abhängig.
(E) Das Volumen vergrößert sich in den Fällen (A), (B) und (C) immer gleich stark.

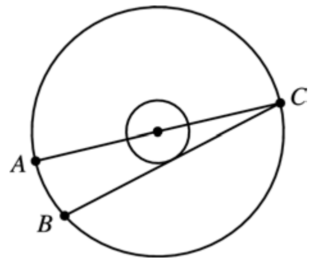
Wir betrachten das Volumen des dazugekommenen Bereichs. Vergrößert man a, so hat dieser ein Volumen von $5\cdot b\cdot c$; Wenn man b vergrößert ist das Volumen $5\cdot a\cdot c$, und wenn man c vergrößert, ist es $5\cdot a\cdot b$. Da $a < b < c$ gilt, ist auch $a\cdot b < a\cdot c < b\cdot c$. Also ist $5\cdot b\cdot c$ am größten.

12. Das Siegerteam eines Fußballspiels erhält 3 Punkte und das Verliererteam 0 Punkte. Bei einem Unentschieden erhalten die Teams je einen Punkt. Vier Teams A, B, C und D spielen ein Turnier. Jedes Team spielt genau einmal gegen jedes andere Team. Am Ende des Turniers hat das Team A 7 Punkte, und die Teams B und C haben je 4 Punkte. Wie viele Punkte hat das Team D?

(A) 0 **(B) 1** (C) 2 (D) 3 (E) 4

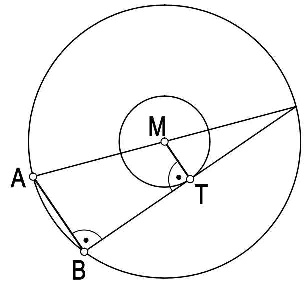
Team A muss 2 Siege und ein Unentschieden erreicht haben, um auf eine Summe von genau 7 Punkten zu kommen. Teams B und C müssen jeweils einen Sieg, eine Niederlage und ein Unentschieden zu verzeichnen haben. Insgesamt muss es gleich viele Siege wie Niederlagen geben. Die Teams A, B und C haben gemeinsam 4 Siege und 2 Niederlagen erlebt, also muss Team D die restlichen 2 Niederlagen erlitten haben. Die Anzahl der Unentschieden muss insgesamt gerade sein. Teams A, B und C haben zusammen 3 Unentschieden erlebt, also muss Team D bei einem Match unentschieden gespielt haben, damit die Gesamtanzahl gerade ist.
Somit hat Team D zwei Niederlagen und ein Unentschieden erreicht, also genau 1 Punkt.

13. Das Verhältnis der Radien zweier konzentrischer Kreise ist 1 : 3. Die Strecke *AC* ist ein Durchmesser des großen Kreises. Eine Sehne *BC* des großen Kreises berührt den kleinen Kreis (siehe Abbildung). Die Strecke *AB* hat die Länge 12. Wie groß ist der Radius des großen Kreises?



(A) 13 **(B) 18** (C) 21 (D) 24 (E) 26

Sei *M* der Mittelpunkt des Kreises, und sei *T* der Berührpunkt von *BC* mit dem kleinen Kreis. Der Winkel <*MTC* beträgt 90°, da *CT* eine Tangente ist. Der Winkel *ABC* beträgt auf Grund des Thalessatzes ebenfalls 90°, da *AC* ein Durchmesser des Kreises ist. Also sind *AB* und *MT* zueinander parallel (als zwei Normalen auf dieselbe Strecke), und die Dreiecke *ABC* und *MTC* ähnlich (da ihre Seiten jeweils zueinander parallel sind).
Die Strecke *MC* ist halb so lang wie die Strecke *AC*, also ist auf Grund der Ähnlichkeit auch *MT* halb so lang wie *AB*. Somit gilt *MT* = 6.
MT ist ein Radius des kleinen Kreises. Das Verhältnis der Radien ist 1 : 3, also ist der Radius des großen Kreises 18.



14. Wie viele Tripel (*a*,*b*,*c*) ganzer Zahlen mit *a* > *b* > *c* > 1 erfüllen die Bedingung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$?

(A) keine (B) 1 **(C) 2** (D) 3 (E) unendlich viele

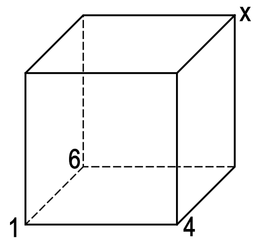
Je kleiner die Zahlen *a*, *b* und *c* sind, desto größer ist die Summe ihrer Kehrwerte. Wir beginnen also mit den kleinstmöglichen Werten, *c* = 2, *b* = 3 und *a* = 4. Für diese ist die Summe der Kehrwerte größer als 1. Die nächstgrößere Möglichkeit erhalten wir, indem wir *a* auf 5 erhöhen; Auch hier ist die Summe der Kehrwerte noch größer als 1. Erhöhen wir *a* aber auf 6 oder mehr, so ist die Summe der Kehrwerte auf jeden Fall kleiner oder gleich 1 (da *c* = 2 und *b* = 3 ja bereits die günstigste Wahl für die anderen beiden Zahlen ist). Für *a* ≥ 6 gibt es also keine weiteren Lösungen. Damit bleiben nur noch die Möglichkeiten (5,4,2) und (5,4,3) zu betrachten; Auch diese liefern aber keine weiteren Lösungen.

15. Sechs Wochen sind *n*! (= *n·(n-1)·...·2·1*) Sekunden. *n* = ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 **(D) 10** (E) 12

Sechs Wochen = $6·7·24·60·60 = (2·3)·7·(2^3·3)·(2^2·3·5)·(2^2·3·5)=2^8·3^4·5^2·7 =1·2·3·4·5·6·7·8·9·10 = 10!$

16. Die Eckpunkte eines Würfels werden so mit den Zahlen von 1 bis 8 beschriftet, dass die Summe der Zahlen an den vier Eckpunkten einer Seitenfläche für alle Seitenflächen des Würfels gleich ist. Die Zahlen 1, 4 und 6 sind im Bild schon zu sehen. Welche Zahl steht an der Stelle x?



(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

Die Summe aller Zahlen von 1 bis 8 beträgt 36. Betrachtet man jeweils zwei gegenüberliegende Seitenflächen, zum Beispiel die linke und die rechte, so muss die Summe der vier Ecken der einen Seitenfläche gleich sein wie die der anderen, während die Summe aller 8 Ecken der beiden Seitenflächen zusammen genau 36 betragen muss. Jede Seitenfläche für sich hat also eine Summe von genau 18.
Für die untere Fläche, von der wir bereits drei Zahlen kennen, folgt damit sofort, dass die vierte Ecke mit der Zahl 7 beschriftet werden muss (1 + 4 + 6 + 7 = 18). Von der hinteren Fläche sind die beiden unteren Ecken bekannt, deren Summe 6 + 7 = 13 beträgt. Die Summe der beiden hinteren oberen Eckpunkte muss also 18 – 13 = 5 betragen. Wir haben noch die Zahlen 2, 3, 5, und 8 zur Auswahl, und können somit schließen, dass die beiden hinteren oberen Ecken mit 2 und 3 beschriftet werden müssen, wobei wir noch nicht wissen, welche der Zahlen rechts und welche links ist. Für die vorderen oberen Ecken bleiben die Werte 5 und 8 übrig.
Nun betrachten wir die rechte Seitenfläche. Die unteren Ecken haben zusammen eine Summe von 4 + 7 = 11, also müssen die oberen gemeinsam eine Summe von 18 – 11 = 7 haben. Von den beiden vorderen oberen Zahlen (5 und

8) muss also 5 auf der rechten Seite stehen (8 wäre zu groß), und von den hinteren oberen Zahlen (2 und 3) steht somit 2 auf der rechten Seite. Also gilt $x = 2$.

17. Auf der Weichkäseverpackung steht: 24 % gesamter Fettanteil. Auf derselben Verpackung steht auch: 64% Fett in der Trockensubstanz. Wie groß ist der Prozentanteil von Wasser in diesem Weichkäse?

(A) 88 % **(B) 62,5 %** (C) 49 % (D) 42 % (E) 37,5 %

Betrachten wir 100g Weichkäse. 24g davon sind Fett. Das sind 64% der Trockensubstanz. Bezeichne *x* die Menge an Trockensubstanz, dann gilt $x \cdot \frac{64}{100} = 24\text{g}$, also $x = 24 \cdot \frac{64}{100}\,\text{g} = \frac{24 \cdot 64}{100}\,\text{g} = 37.5\text{ g}$. Die Menge an Wasser ist daher 100g – 37.5g = 62.5g. Pro 100g Weichkäse sind also 62.5g Wasser enthalten, also 62.5%.

18. Die Funktion $f(x) = ax + b$ erfüllt die Bedingungen $f(f(f(1))) = 29$ und $f(f(f(0))) = 2$. Welchen Wert hat a?

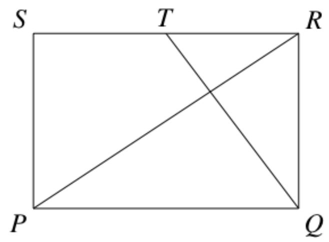
(A) 1 (B) 2 **(C) 3** (D) 4 (E) 5

Für jedes y gilt $f(f(f(y))) = f(f(ay + b)) = f(a(ay + b) + b) = f(a^2y + ab + b) = a(a^2y + ab + b) + b = a^3y + a^2b + ab + b$.
Für $y = 0$ erhalten wir $f(f(f(0))) = a^3\cdot 0 + a^2b + ab + b = 2$, und für $y = 1$ erhalten wir $f(f(f(1))) = a^3\cdot 1 + a^2b + ab + b = 29$.
Berechnen wir die Differenz: $f(f(f(1))) – f(f(f(0))) = 29 – 2 = 27 = (a^3\cdot 1 + a^2b + ab + b) – (a^3\cdot 0 + a^2b + ab + b) = a^3$.
Also gilt $a = 3$.

19. Unter 10 verschiedenen positiven ganzen Zahlen sind genau 5 durch 5 teilbar und genau 7 durch 7 teilbar. Es sei M die größte unter den gegebenen Zahlen. Was ist der kleinstmögliche Wert von M?

(A) 105 (B) 77 (C) 75 (D) 63 **(E) ein anderer Wert**

Mindestens 2 der Zahlen müssen sowohl durch 5 als auch durch 7 teilbar sein, sonst bräuchten wir mehr als 10 Zahlen um beide Bedingungen zu erfüllen. Die beiden kleinsten Zahlen, die durch 5 und durch 7 teilbar sind, sind 35 und 70. Tatsächlich erhalten wir eine Lösung mit **5**, <u>7</u>, **10**, <u>14</u>, **15**, <u>21</u>, <u>28</u>, <u>**35**</u>, <u>42</u>, <u>**70**</u>, wobei die **durch 5 teilbaren Zahlen fett** und die <u>durch 7 teilbaren Zahlen unterstrichen</u> sind.



20. *PQRS* ist ein Rechteck. *T* ist der Mittelpunkt von *RS*. *QT* steht normal zur Diagonale *PR*. Wie lautet das Verhältnis der Längen *PQ* : *QR*?

(A) 2 : 1 (B) $\sqrt{3}$: 1 (C) 3 : 2 **(D) $\sqrt{2}$: 1** (E) 5 : 4

Bezeichne *D* den Schnittpunkt und *α* den Winkel *RPQ*, dann gilt weiters:
$<PRQ = 90° - <RPQ = 90° - \alpha$ (Winkelsumme in *PRQ* mit rechtem Winkel in *Q*)
$<TRP = 90° - <PRQ = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$ (die beiden Winkel ergeben zusammen den Winkel $<TRQ = 90°$).
Oder: $<TRP = <RPQ = \alpha$ (Parallelwinkelsatz zwischen parallelen Strecken *TR* und *PQ*)
$<RTD = 90° - <TRD = 90° - \alpha$ (Winkelsumme in *RTD* mit rechtem Winkel in *D*)
$<RQD = 90° - <DRQ = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$ (Winkelsumme in *RQD* mit rechtem Winkel in *D*)
Also sind die Dreiecke *PQR* und *QRT* zueinander ähnlich. Für die Verhältnisse ihrer Seiten gilt also *PQ* : *QR* = *QR* : *RT*.
Sei $x = RT$ und $y = QR$. Da *T* der Mittelpunkt von *SR* ist und $SR = PQ$, gilt $PQ = 2x$. Damit gilt:

$$PQ:QR = QR:RT$$
$$\frac{2x}{y} = \frac{y}{x}$$
$$2x^2 = y^2$$
$$y = \sqrt{2}\cdot x$$
$$PQ:QR = \frac{2x}{y} = \frac{2x}{\sqrt{2}\cdot x} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

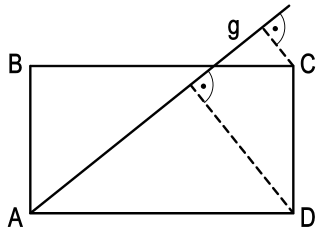
- 5 Punkte Beispiele -

21. Es sind *a,b,c* von Null verschiedene reelle Zahlen und *n* eine positive ganze Zahl. Es ist bekannt, dass die Zahlen $(-2)^{2n+3}\cdot a^{2n+2}\cdot b^{2n-1}\cdot c^{3n+2}$ und $(-3)^{2n+2}\cdot a^{4n+1}\cdot b^{2n+5}\cdot c^{3n-4}$ dasselbe Vorzeichen haben. Welche der folgenden Aussagen ist sicher wahr?

(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ **(D) $a < 0$** (E) $b < 0$

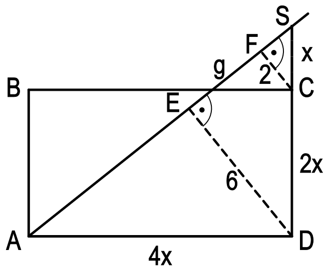
-2 hat eine ungerade Hochzahl, also ist $(-2)^{2n+3}$ negativ. Die Hochzahl von -3 ist gerade, also ist $(-3)^{2n+2}$ positiv.
b hat sowohl links als auch rechts eine ungerade Hochzahl, also ist das Vorzeichen von b^{2n-1} auf der linken Seite gleich wie das Vorzeichen von b^{2n+5} auf der rechten Seite (unabhängig von der Wahl von *b* und *n*).
Die Hochzahlen von *c* auf der linken und rechten Seite sind entweder beide gerade oder beide ungerade, also sind auch die Vorzeichen von c^{3n+2} und c^{3n-4} gleich (für jede Wahl von *c* und *n*).
a dagegen hat links eine gerade und rechts eine ungerade Hochzahl. Falls *a* positiv ist, sind sowohl a^{2n+2} als auch a^{4n+1} positiv. Ist *a* dagegen negativ, so ist genau einer der beiden Werte negativ und der andere positiv. Um die

verschiedenen Vorzeichen von $(-2)^{2n+3}$ und $(-3)^{2n+2}$ auszugleichen und insgesamt das gleiche Vorzeichen zu erhalten, muss *a* also negativ sein.



22. Die Gerade *g* geht durch den Eckpunkt *A* des abgebildeten Rechtecks *ABCD*. Der Normalabstand von *C* zu *g* ist 2 und der von *D* zu *g* ist 6. *AD* ist doppelt so lang wie *AB*. Bestimme die Länge von *AD*.

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) $4\sqrt{3}$



Sei *S* der Schnittpunkt von *DC* und *g*, sei *E* der Fußpunkt des Normalabstandes von *D* auf *g*, und sei *F* der Fußpunkt des Normalabstandes von *C* auf *g*. Die Dreiecke *SED* und *SFC* sind zueinander ähnlich, da ihre Seiten jeweils zueinander parallel sind. Somit gilt *SC* : *SD* = *FC* : *ED* = 2 : 6 = 1 : 3. Sei also *SC* = *x*, folglich *SD* = 3*x*, *CD* = 2*x*, und laut Angabe weiters *AD* = 2*CD* = 4*x*. Gemäß des Satzes von Pythagoras folgt $AS^2 = AD^2 + DS^2 = (4x)^2 + (3x)^2 = 25x^2$, also *AS* = 5*x*.

Nun sehen wir weiters, dass die Dreiecke *ADE* und *ASD* zueinander ähnlich sind, da sie die gleichen Winkel haben. (Beide haben einen rechten Winkel, und den gemeinsamen Winkel <*SAD* = <*DAE*, somit muss auch der dritte Winkel übereinstimmen.) Also gilt:

$$AD : DE = AS : SD$$

$$\frac{4x}{6} = \frac{5x}{3x} \Leftrightarrow \frac{4x}{6} = \frac{5}{3}$$

$$AD = 4x = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10$$

23. Es gibt 9 Kängurus die Greatkangs genannt werden. Diese sind entweder weiß oder schwarz gefärbt. Treffen sich drei Greatkangs zufällig, ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines davon weiß ist, genau zwei Drittel. Wie viele Greatkangs sind schwarz?

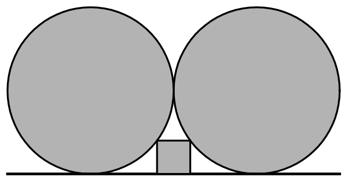
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 **(E) 8**

Sei *x* die Anzahl der schwarzen Greatkangs. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem zufälligen Treffen dreier Greatkangs drei schwarze zu sehen, entspricht der Anzahl aller möglichen Auswahlen von drei schwarzen Greatkangs, dividiert durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Auswahlen von drei Greatkangs (d.h. günstige durch mögliche Fälle):

$$\frac{2}{3} = \frac{\binom{x}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{x(x-1)(x-2)}{9\cdot8\cdot7}$$

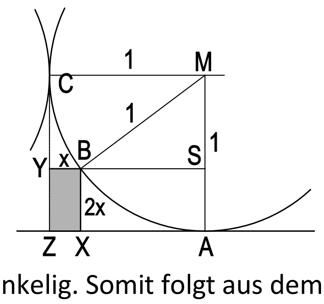
$$x(x-1)(x-2) = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 6 \cdot 8 \cdot 7$$

Also *x* = 8.



24. In nebenstehender Abbildung ist folgendes zu sehen: eine Gerade, die gemeinsame Tangente zweier berührender Kreise mit Radius 1 ist, und ein Quadrat mit einer Seite auf der Geraden und je einem Eckpunkt auf den beiden Kreisen. Wie groß ist die Seitenlänge des Quadrats?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (E) $\frac{1}{2}$



Wir betrachten einen vergrößerten Ausschnitt. Sei *M* der Mittelpunkt des rechten Kreises, *A* der Berührpunkt mit der gemeinsamen Tangenten, *B* der Berührpunkt mit dem Quadrat, und *C* der Berührpunkt mit dem anderen Kreis. Es gilt *MA* = *MB* = *MC* = 1, da alles Radien des Kreises sind. Weiters sei *X* der untere Eckpunkt des Quadrates wie in der Zeichnung (also der Lotfußpunkt von *B* auf die Tangente), sei *Y* der Mittelpunkt der oberen Quadratseite, und sei *Z* der Mittelpunkt der unteren Quadratseite. *ZAMC* ist also ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Bezeichne 2*x* die Seitenlänge des Quadrates, dann gilt *ZX* = *YB* = *x* und *XB* = 2*x*. Zuletzt sei *S* der Lotfußpunkt von *B* auf *AM*. Dann gilt *BS* = 1 – *x* und *SM* = 1 – 2*x*. Weiters ist *BSM* rechtwinkelig. Somit folgt aus dem Satz von Pythagoras, dass

$$1^2 = BM^2 = BS^2 + SM^2 = (1-x)^2 + (1-2x)^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 2 - 6x + 5x^2$$

$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot5\cdot1}}{5\cdot2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{10} = \frac{6 \pm 4}{10} = \left\{1, \frac{1}{5}\right\}$$

Die Lösung x_1=1 macht keinen Sinn, somit ist x_2=1/5 die halbe Länge des Quadrates.

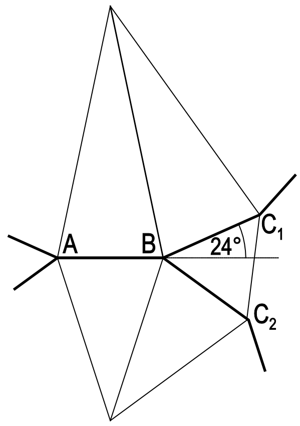
25. Thomas möchte einige paarweise verschiedene positive ganze Zahlen aufschreiben, von denen keine größer als 100 sein soll. Ihr Produkt soll nicht durch 54 teilbar sein. Wie viele Zahlen kann er höchstens aufschreiben?

(A) 8 (B) 17 (C) 68 **(D) 69** (E) 90

Damit das Produkt nicht durch $54=2\cdot3^3$ teilbar ist, darf es entweder keinen 2er, oder höchstens zwei 3er enthalten. Um eine Menge zu wählen, deren Produkt keine 2er enthält, können wir alle ungeraden Zahlen von 1 bis 100 auswählen. Gerade Zahlen dürfen wir keine hinzufügen, also erhalten wir höchstens 50 Zahlen.
Um eine Menge zu erhalten, deren Produkt höchstens zwei 3er enthält, wählen wir zunächst alle Zahlen von 1 bis 100, die nicht durch 3 teilbar sind, also alle Zahlen außer 3, 6, 9, 12, ..., 99. Das sind 67 Zahlen. Nun dürfen wir noch maximal zwei Zahlen hinzufügen, die jeweils einen 3er enthalten, beispielsweise 3 und 6. Auf diese Weise können wir also bis zu 69 Zahlen auswählen.

26. Zwei regelmäßige Vielecke mit der Seitenlänge 1 liegen auf gegenüberliegenden Seiten der gemeinsamen Seite *AB*. Eines davon ist das 15-Eck $ABC_1D_1E_1$... und das andere ist das *n*-Eck $ABC_2D_2E_2$... . Für welchen Wert von *n* ist der Abstand von C_1 zu C_2 genau 1?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18



Wenn ich mit einem Auto entlang des Vielecks ein Mal rundherum fahre, dreht sich das Auto insgesamt um 360°, und zwar bei jeder Ecke gleich weit. Beim 15-Eck dreht sich das Auto also an jeder Ecke um 360°/15 = 24° (»Außenwinkel«). Beim *n*-Eck dreht sich das Auto an jeder Ecke um 360°/*n*.
Betrachten wir das Dreieck BC_1C_2. Jede der drei Seiten hat eine Länge von 1, also ist das Dreieck gleichseitig und hat somit drei Winkel mit je 60°. Der Winkel C_1BC_2 setzt sich zusammen aus einem Außenwinkel des 15-Ecks und einem Außenwinkel des *n*-Ecks. Der Außenwinkel des *n*-Ecks ist somit 60°-24°=36° groß, also ist *n* (wegen 36° = 360°/*n*) gleich 10.

27. Die Gleichungskette $k=(2014+m)^{\frac{1}{n}}=1024^{\frac{1}{n}}+1$ soll für positive ganze Zahlen *k*, *m*, *n* gelten. Wie viele verschiedene Werte kann *m* annehmen?

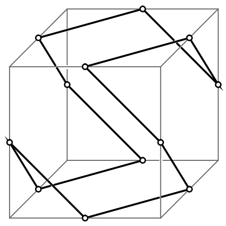
(A) keine (B) 1 **(C) 2** (D) 3 (E) unendlich viele

Zunächst muss $1024^{\frac{1}{n}}+1$ eine ganze Zahl sein, damit *k* ganzzahlig ist. Es gilt $1024^{\frac{1}{n}}=(2^{10})^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{10}{n}}$. Dies ist ganzzahlig dann und nur dann, wenn die Hochzahl 10/*n* eine ganze Zahl ist. Somit bleiben für *n* nur die möglichen Werte 1, 2, 5 und 10 übrig. Für diese berechnen wir nun, was sich dann für die Zahl *m* ergeben würde, wobei nach Umformung gilt, dass $m=\left(2^{\frac{10}{n}}+1\right)^n-2014$:

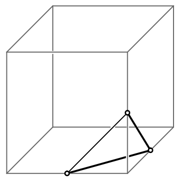
n	$2^{\frac{10}{n}}+1$	$\left(2^{\frac{10}{n}}+1\right)^n$	$m=\left(2^{\frac{10}{n}}+1\right)^n-2014$
1	1025	1025	-989
2	33	1089	-925
5	5	3125	1111
10	3	59049	57035

Somit gibt es zwei Lösungen, in denen auch *m* positiv und ganzzahlig ist.

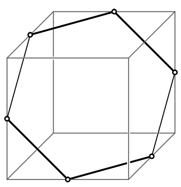
28. Im Bild sehen wir ein geschlossenes Vieleck, dessen Eckpunkte jeweils die Mittelpunkte der Würfelkanten sind. Ein Innenwinkel wird wie üblich als der Winkel definiert, den zwei Vieleckseiten im gemeinsamen Endpunkt einschließen. Wie groß ist die Summe aller Innenwinkel des Vielecks?



(A) 720° (B) 1080° (C) 1200° (D) 1440° (E) 1800°



Wir haben zwei Arten von Winkeln: Etwas spitzere, bei denen die beiden benachbarten Eckpunkte auf einer gemeinsamen Seitenfläche liegen, und etwas stumpfere, bei denen die benachbarten Eckpunkte auf gegenüberliegenden Seitenflächen liegen.
Für erstere zeichnen wir noch eine zusätzliche Linie zwischen den beiden benachbarten Eckpunkten ein und sehen, dass wir somit ein gleichseitiges Dreieck erhalten. Der Winkel muss also 60° betragen.



Für die zweite Art von Winkeln betrachten wir die abgebildete Figur, die aus 6 derartigen Winkeln nacheinander besteht: Alle Punkte dieses Sechsecks liegen auf einer Ebene, und alle Seiten sind gleich lang, somit ist das Sechseck gleichseitig, und jeder Innenwinkel beträgt 120°.
Insgesamt haben wir je 6 Winkel von der ersten und 6 Winkel von der zweiten Art, zusammen also $6\cdot60°+6\cdot120°=1080°$.

29. Die Abbildung $f: Z \to Z$ erfüllt die Bedingungen $f(4) = 6$ und $x \cdot f(x) = (x-3) \cdot f(x+1)$. Welchen Wert hat der Ausdruck $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \ldots \cdot f(2011) \cdot f(2014)$?

(A) 2013 (B) 2014 (C) 2013·2014 **(D) 2013!** (E) 2014!

Für jedes *x* gilt also $f(x+1) = f(x) \cdot \frac{x}{x-3}$. Wir berechnen die ersten Werte auf diese Art und versuchen, ein Muster zu erkennen:

$$f(4) = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$f(5) = f(4) \cdot \frac{4}{1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{1} = 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$f(6) = f(5) \cdot \frac{5}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} = 3 \cdot 4 \cdot 5$$
$$f(7) = f(6) \cdot \frac{6}{3} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{6}{3} = 4 \cdot 5 \cdot 6$$

Wir vermuten:

$$f(n) = (n-3)(n-2)(n-1)$$

Beweis durch Vollständige Induktion:
Basis: Siehe oben.
Annahme: Für 1, 2, ..., *N* gilt die Gleichung.
Induktionsschritt: Wir müssen zeigen, dass sie dann auch für *N* + 1 gilt. Es gilt:

$$f(N+1) = f(N) \cdot \frac{N}{N-3} = (N-3)(N-2)(N-1) \cdot \frac{N}{N-3} = (N-2)(N-1)N$$

Für das Produkt erhalten wir somit:

$$f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \ldots \cdot f(2011) \cdot f(2014) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2011 \cdot 2012 \cdot 2013 = 2013!$$

30. In den Wäldern eines magischen Inselreichs gibt es drei Tierarten: Löwen, Wölfe und Ziegen. Wölfe können Ziegen fressen und Löwen können sowohl Wölfe als auch Ziegen fressen. Da es sich um ein magisches Inselreich handelt, verwandelt sich ein Wolf, der eine Ziege frisst, in einen Löwen. Ein Löwe, der eine Ziege frisst, verwandelt sich in einen Wolf und ein Löwe, der einen Wolf frisst, verwandelt sich in eine Ziege. Zu Beginn befanden sich 17 Ziegen, 55 Wölfe und 6 Löwen auf der Insel. Nach einiger Zeit ist kein weiteres Fressen mehr möglich. Wie groß ist die maximale Anzahl der Tiere, die sich dann noch auf der Insel befinden können?

(A) 1 (B) 6 (C) 17 (D) 23 (E) 35

Kein Fressen ist erst dann mehr möglich, wenn nur noch eine Tierart übrig bleibt.
Durch Ausprobieren erhalten wir den folgenden Ablauf als Lösung:

	Löwen	Wölfe	Ziegen
Anfangsstand	6	55	17
17 Wölfe fressen je eine Ziege und werden zu Löwen	23	38	0
19 Löwen fressen je einen Wolf und werden zu Ziegen	4	19	19
19 Wölfe fressen je eine Ziege und werden zu Löwen	23	0	0

Zu zeigen, dass es keine Lösung gibt, bei der mehr Tiere übrig bleiben, ist etwas trickreicher.
Zunächst sehen wir, dass es drei Arten von Fressvorgängen gibt und betrachten, wie sich diese auf die Gesamtpopulation auswirken:

	Löwen	Wölfe	Ziegen
A: Löwe frisst Ziege und wird zu Wolf	-1	+1	-1
B: Wolf frisst Ziege und wird zu Löwe	+1	-1	-1
C: Löwe frisst Wolf und wird zu Ziege	-1	-1	+1

Wir sehen also, dass die Parität der Differenz zweier Arten immer gleich bleibt: Wenn die Differenz zwischen zwei Arten vor dem Fressen ungerade ist, so ist sie es auch danach. Ist die Differenz dagegen vorher gerade, so bleibt sie gerade.
Damit kein weiteres Fressen mehr möglich ist, müssen zwei Arten auf 0 reduziert werden. Zu Beginn ist die Anzahl der Löwen gerade, die der Wölfe und Ziegen aber ungerade. Nehmen wir an, die Löwen wären eine der beiden Arten, die auf 0 reduziert werden. Die Differenz zwischen Löwen und Wölfen ist am Anfang ungerade, und bleibt es somit auch während des gesamten Verlaufes. Falls es 0 Löwen gibt, muss es also eine ungerade Anzahl von Wölfen geben, also mehr als 0. Aber auch die Differenz zwischen Löwen und Ziegen ist ungerade, also müsste auch eine ungerade Anzahl von Ziegen existieren. Es ist also nicht möglich, eine Situation zu erreichen, in der die Anzahl der Löwen und die Anzahl einer weiteren Tierart gleichzeitig 0 sind. Folglich müssen es die Löwen sein, die am Ende übrig bleiben.

Nehmen wir nun an, insgesamt wurde A Mal die erste Art des Fressens durchgeführt, B Mal die zweite, und C Mal die dritte. Dann gilt für die Anzahl am Ende:

Löwen = $6 - A + B - C$

Wölfe = $55 + A - B - C = 0$

Ziegen = $17 - A - B + C = 0$

Wir addieren die letzten beiden Zeilen und erhalten $72 - 2B = 0$, also $B = 36$. Es muss im gesamten Verlauf also genau 36 Mal ein Wolf durch das Fressen von einer Ziege zu einem Löwen werden. Würde das gleich am Anfang passieren, wäre der Populationsstand somit folgender:

	Löwen	Wölfe	Ziegen
Anfangsstand	6	55	17
36 Wölfe fressen je eine Ziege und werden zu Löwen	42	19	-19

Da die Anzahl der Ziegen am Ende aber nicht negativ sein kann, müssen noch mindestens 19 Ziegen entstehen, indem 19 Löwen je einen Wolf fressen:

19 Löwen fressen je einen Wolf und werden zu Ziegen	23	0	0

Damit haben wir unser Ziel bereits erreicht und benötigen keine weiteren Fressvorgänge mehr. Somit haben wir bewiesen, dass *höchstens* 23 Tiere überleben können. Dass es eine Reihenfolge gibt, mit der wir diese obere Grenze auch tatsächlich erreichen können, haben wir bereits am Anfang durch Probieren gefunden.