Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich - 20.3.2014

- 3 Punkte Beispiele -

1. Der Känguruwettbewerb findet jedes Jahr am dritten Donnerstag im März statt. Welcher Tag ist der frühestmögliche Termin für den Bewerb?

(A) 14.3. **(B) 15.3.** (C) 20.3. (D) 21.3. (E) 22.3.

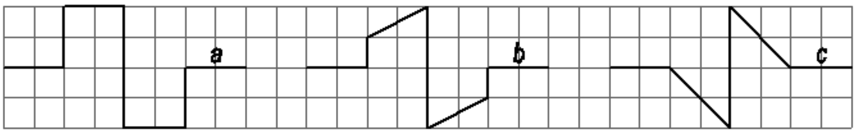
Der erste Donnerstag im März kann frühestens auf den 1. März fallen. Der dritte Donnerstag im März ist 2 · 7 = 14 Tage später. 1 + 14 = 15, daher ist der frühestmögliche Termin für den Bewerb der 15.3.

2. Das Containerschiff MSC Fabiola ist mit 12500 gleich langen Containern beladen. Aneinander gereiht ergeben sie eine 75 km lange Containerschlange. Wie lang ist ein Container ungefähr?

(A) 6 m (B) 16 m (C) 60 m (D) 160 m (E) 600 m

75 km $=$ 75000 m; $75000:12500=750:125=6$. Jeder Container ist ungefähr 6 m lang.

3. Mit *a*, *b* und *c* werden die Längen der abgebildeten unterschiedlich geformten Drahtstücke bezeichnet. Welche der folgenden Ungleichungen ist richtig?



(A) $a<b<c$ (B) $a<c<b$ (C) $b<a<c$ (D) $b<c<a$ **(E)** $c<b<a$

4. Welche Zahl ist auf der Zahlengeraden gleich weit von $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ entfernt?

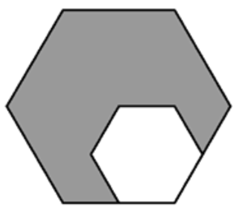
(A) $\frac{11}{15}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{6}{15}$ (E) $\frac{5}{8}$

Die gesuchte Zahl *m* ist größer als $\frac{2}{3}$ und kleiner als $\frac{4}{5}$. Daher erfüllt sie die Gleichung $m-\frac{2}{3}=\frac{4}{5}-m$. Umformen dieser Gleichung ergibt $m=\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}{2}=\dfrac{10+12}{30}=\dfrac{11}{15}$; *m* kann also als Mittelwert („arithmetisches Mittel") von $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ berechnet werden.

5. In der Jahreszahl 2014 ist die letzte Ziffer größer als die Summe der drei anderen Ziffern. Vor wie vielen Jahren war dies das letzte Mal der Fall?

(A) 1 (B) 3 **(C) 5** (D) 7 (E) 11

Für jede Jahreszahl ab 2010, die vor 2014 liegt, ist die letzte Ziffer *E* nicht größer als die Summe $T+H+Z=2+0+1=3$ ihrer drei anderen Ziffern.
Für die Jahreszahl 2009 gilt hingegen $2+0+0=2<9$; damals, also vor 5 Jahren, war die letzte Ziffer der Jahreszahl größer als die Summe der drei anderen Ziffern.



6. Die Seiten des großen regelmäßigen Sechsecks sind doppelt so lang wie jene des kleinen regelmäßigen Sechsecks. Wie groß ist der Flächeninhalt des großen Sechsecks, wenn das kleine eine Fläche von 4 cm^2 hat?

(A) 16 cm^2 (B) 14 cm^2 (C) 12 cm^2 (D) 10 cm^2 (E) 8 cm^2

Verhalten sich in zwei ähnlichen Figuren die Längen entsprechender Strecken wie $1:k$, so verhalten sich ihre Flächen wie $1:k^2$. Weil die Seiten des großen Sechsecks 2-mal so lang sind wie die des kleinen Sechsecks, ist die Fläche des großen Sechsecks 4-mal so groß sind wie die des kleinen Sechsecks, beträgt also 4 · 4 cm² = 16 cm².

7. Welche Aussage ist sicher richtig, wenn folgende Aussage falsch ist: „Jeder hat mehr als 20 Probleme gelöst."

(A) Niemand hat mehr als 20 Probleme gelöst.
(B) Jemand hat weniger als 21 Probleme gelöst.
(C) Jeder hat weniger als 21 Probleme gelöst.
(D) Jemand hat genau 20 Probleme gelöst.
(E) Jemand hat mehr als 20 Probleme gelöst.

Wenn die Aussagen „Jeder hat mehr als 20 Probleme gelöst" falsch ist, muss es mindestens eine Person geben, die nicht mehr als 20 (d.h. höchstens 20) Probleme und damit weniger als 21 Probleme gelöst hat. (Das müssen aber nicht genau 20 Probleme gewesen sein!)

8. Tom zeichnet ein Quadrat in ein Koordinatensystem ein. Eine Diagonale liegt auf der x-Achse. Ihre Endpunkte sind $(-1|0)$ und $(5|0)$. Welcher der folgenden Punkte ist auch ein Eckpunkt dieses Quadrats?

(A) $(2|0)$ **(B) $(2|3)$** (C) $(2|-6)$ (D) $(3|5)$ (E) $(3|-1)$

In jedem Quadrat stehen die Diagonalen normal zu einander, beide Diagonalen sind gleich lang und der Diagonalenschnittpunkt halbiert beide Diagonalen.
Für das gegeben Quadrat ist die Diagonalenlänge $5 - (-1) = 6$, der Mittelpunkt ist $(2|0)$. Die fehlenden Eckpunkte haben die Koordinaten $(2|-3)$ und $(2|3)$.

9. In Kängurucity gibt es m Männer, f Frauen und k Kinder. Es gilt $m : f = 2 : 3$ und $f : k = 8 : 1$.
In welchem Verhältnis steht die Anzahl der Erwachsenen (Männer und Frauen) zur Anzahl der Kinder?

(A) 5 : 1 (B) 10 : 3 (C) 13 : 1 (D) 12 : 1 **(E) 40 : 3**

Es gilt $m : f = 2 : 3 = 16 : 24$ und $f : k = 8 : 1 = 24 : 3$. Daraus folgt $m : f : k = 16 : 24 : 3$. Weil die Anzahl der Erwachsenen durch $m + f$ gegeben ist, ist das gesuchte Verhältnis $(m+f) : k = (16+24) : 3 = 40 : 3$.

10. Der Umfang des großen Rades beträgt 4,2 m, jener des kleinen 0,9 m. Zu Beginn sind die Ventile der beiden Räder am tiefsten Punkt; dann bewegt sich das Fahrrad nach links. Nach einigen Metern sind beide Ventile wieder gleichzeitig am tiefsten Punkt. Nach wie vielen Metern ist dies zum ersten Mal der Fall?

(A) 4,2 m (B) 6,3 m **(C) 12,6 m** (D) 25,2 m (E) 37,8 m

Die Umfänge der beiden Räder betragen 42 dm beziehungsweise 9 dm. Weil bis zu dem Zeitpunkt, zu dem erstmals wieder beide Ventile gleichzeitig am tiefsten Punkt sind, jedes Rad eine ganzzahlige Anzahl von Umdrehungen gemacht haben muss, ist die bis dahin zurückgelegte Entfernung (in dm) das kleinste gemeinsame Vielfache von 42 und 9. Wegen $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $9 = 3^2$ gilt $\text{kgV}(9, 42) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$. 126 dm = 12,6 m.

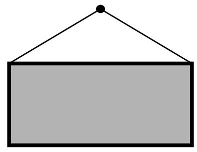
- 4 Punkte Beispiele -

11. Eine Großmutter, ihre Tochter und ihre Enkelin hatten alle im Februar Geburtstag. Nun können sie sagen, dass sie in Summe 100 Jahre alt sind, und dass das Alter jeder Person eine Potenz von 2 ist. In welchem Jahr wurde die Enkelin geboren?

(A) 1998 (B) 2006 **(C) 2010** (D) 2012 (E) 2013

Die als Alter in Frage kommenden Potenzen von 2 sind 1, 2, 4, 8, 16, 32 und 64. Um durch drei dieser Zahlen die Summe 100 zu erreichen, muss 64 (als Alter der Großmutter) unter den drei Zahlen vorkommen. Die Summe der anderen zwei Summanden ist daher 36, also muss auch 32 (als Alter der Tochter) verwendet werden. Die Enkelin ist daher (seit Februar 2014) 4 Jahre alt und wurde 2010 geboren.

12. Paul hängt rechteckige Bilder an eine Wand. Für jedes Bild schlägt er 2,5 m über dem Fußboden einen Nagel in die Wand. An jedem Bild bringt er an den oberen beiden Ecken eine Schnur mit einer Gesamtlänge von 2 m an (siehe Abbildung).
Bei welchem Bildformat (Breite in cm $\times$ Höhe in cm) ist die untere Kante dem Boden am nächsten?



(A) 60×40 (B) 120×50 **(C) 120×90** (D) 160×60 (E) 160×100

In jedem Fall bilden die (gespannte) Schnur und die Oberkante des Bildes ein gleichschenkliges Dreieck. Die Basislänge ist jeweils die Breite des Bildes, die Schenkellänge stimmt mit der halben Länge der Schnur überein, beträgt also $1m = 10dm$.
Die untere Kante des Bildes ist dem Boden am nächsten, wenn ihr Abstand vom Nagel am größten ist. Diesen Abstand erhält man als Summe der Höhe des Bildes und der Höhe des gleichschenkligen Dreiecks oberhalb des Bildes.

Für die Bildformate (D) und (E) (Breite 16 dm) ist die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks $\sqrt{10^2 - 8^2} = 6dm$. Format (E) ist höher als (D) und liefert den Abstand 10 dm + 6 dm = 16 dm.

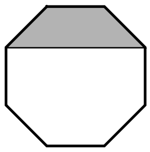
Für die Bildformate (B) und (C) (Breite 12 dm) ist die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8dm$. Format (C) ist höher als (B) und liefert den Abstand 9 dm + 8 dm = 17 dm.
Für Format (A) ist die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks kleiner als 10 dm (= halbe Schnurlänge), der Abstand also kleiner als 10 dm + 4 dm = 14 dm.

13. In einer Wohngemeinschaft, in der sechs Mädchen wohnen, gibt es zwei Badezimmer. Jeden Morgen ab 7:00 benützen die Mädchen vor dem Frühstück die Bäder, wobei sie sich jeweils 9, 11, 13, 18, 22 und 23 Minuten durchgehend alleine in einem der beiden Badezimmer aufhalten. Wann können alle sechs Mädchen frühestens gemeinsam frühstücken?

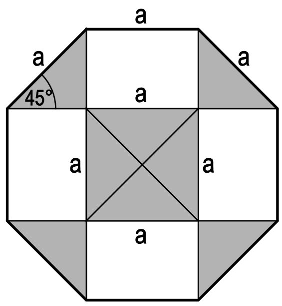
(A) 7:48 **(B) 7:49** (C) 7:50 (D) 7:51 (E) 8:03

Insgesamt werden die beiden Badezimmer 96 Minuten benützt, daher ist (mindestens) eines der beiden Badezimmer mindestens 48 Minuten besetzt. Es ist unter der 6 gegebenen „Toilettenzeiten" nicht möglich, eine Auswahl derart zu treffen, dass sich die Summe 48 Minuten ergibt, hingegen gilt 9 + 18 + 22 = 49. Daher kann das letzte Mädchen aus dem länger benützten Bad um 7:49 (aber nicht früher) zum Frühstück kommen.

14. Der grau gefärbte Flächenanteil des regelmäßigen Achtecks beträgt 3 cm^2.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Achtecks?



(A) $8+4\sqrt{2}$ cm^2 (B) 9 cm^2 (C) $8\sqrt{2}$ cm^2 **(D)** 12 $\mathbf{cm^2}$ (E) 14 cm^2



Wie man aus der rechts stehenden Abbildung sieht, setzt sich die 8-ecks-Fläche aus 8 kongruenten gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecken und 4 kongruenten Rechtecken zusammen. Das grau gefärbte Trapez aus der Angabe besteht aus 2 solchen Dreiecken und einem Rechteck und hat den Flächeninhalt 3 cm^2.
Damit hat das Achteck genau das Vierfache nämlich 12 cm^2 als Flächeninhalt.

15. Beim größten Krokodil in einem Zoo macht die Länge des Schwanzes ein Drittel der Gesamtlänge des Krokodils aus. Der Kopf ist 93 cm lang und hat damit ein Viertel der Länge des Krokodils ohne Schwanz. Wie lang ist das Krokodil?

(A) 558 cm (B) 496 cm (C) 490 cm (D) 372 cm (E) 186 cm

Ohne Schwanz ist das Krokodil 4 · 93 cm = 372 cm lang; das sind zwei Drittel seiner Gesamtlänge. Daher beträgt die Gesamtlänge des Krokodils $\frac{3}{2} \cdot 372cm = 558cm$.

16. Addiert man die Zahlen von gegenüberliegenden Seiten dieses "Spezialwürfels", erhält man dreimal dieselbe Summe. Die Zahlen auf den nicht sichtbaren Seiten dieses Würfels sind Primzahlen. Welche Zahl liegt auf der gegenüberliegenden Seite von 14?

(A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 **(E) 23**

Unter den sichtbaren Zahlen 14, 18 und 35 kommen gerade und ungerade Zahlen vor. Weil die Summen einander gegenüberliegender Zahlen jeweils gleich sind, müssen also auch unter den gegenüberliegenden Primzahlen gerade und ungerade vorkommen. Einzige gerade Primzahl ist aber 2, also steht 2 der einzigen in der Abbildung sichtbaren ungeraden Zahl 35 gegenüber, und die dreimal auftretende Summe ist 35 + 2 = 37. Daher liegt gegenüber der Zahl 14 die Zahl 37 – 14 = 23.

17. Anna geht eine Strecke von 8 km mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h. Dann läuft sie eine Zeit lang mit 8 km/h. Wie viele Minuten muss sie laufen, damit sie insgesamt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 5 km/h unterwegs ist?

(A) 15 min (B) 20 min (C) 30 min (D) 35 min **(E) 40 min**

Anna legt einen Weg von 8 km + 8·t km zurück. (t ist die gesuchte Zeit). Insgesamt ist sie damit 2 Std. + t Std. unterwegs. Ansatz für die Durchschnittsgeschwindigkeit: $\frac{8+8\cdot t}{2+t}=5$. Aus dieser Gleichung erhält man $t=\frac{2}{3}$ (in h). $\frac{2}{3}$ h $=40$ min.

18. Ein Schachspieler spielt 40 Partien und erreicht dabei 25 Punkte, wobei ein Sieg 1 Punkt, ein Remis $\frac{1}{2}$ Punkt und eine verlorene Partie 0 Punkte zählt. Um wie viele Partien gewinnt er mehr als er verliert?

(A) 5 (B) 7 **(C) 10** (D) 12 (E) 15

Mit gleich vielen Siegen wie Niederlagen in 40 Partien hätte der Schachspieler genau 20 Punkte erreicht.
Ein besseres Ergebnis ergibt sich
i) durch ein Remis statt einer Niederlage ($+\frac{1}{2}$ Punkt), ii) durch einen Sieg statt eines Remis ($+\frac{1}{2}$ Punkt),
iii) durch einen Sieg statt einer Niederlage ($+1$ Punkt).
Die Differenz von gewonnenen und verlorenen Spielen vergrößert sich in den ersten beiden Fällen um 1, im dritten Fall um 2. Ein halber Punkt mehr bedeutet in jedem Fall eine um 1 größere Differenz von gewonnenen und verlorenen Spielen. Insgesamt 25 Punkte (und damit 5 Punkte mehr als bei identischer Anzahl von Siegen und Niederlagen) erzielt der Spieler also, wenn er 10 Spiele mehr gewinnt als verliert.

19. Die Drillinge Meike, Monika und Zita wollten jeweils einen gleich teuren Hut kaufen. Allerdings war das Ersparte von Meike um $\frac{1}{3}$, das von Monika um $\frac{1}{4}$ und jenes von Zita um $\frac{1}{5}$ kleiner als der Kaufpreis eines Hutes. Nachdem diese Hüte um je 9,40 € billiger wurden, legten die Drillinge ihr Erspartes zusammen und jede von ihnen kaufte einen Hut. Es blieb kein Cent übrig. Wie viel hat ein Hut ursprünglich gekostet?

(A) 12 € (B) 16 € (C) 28 € **(D) 36 €** (E) 112 €

Bezeichnen wir den ursprünglichen Preis eines Hutes (in €) mit x, dann ist der Betrag, der den Drillingen zum Kauf fehlt, $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}=\frac{47x}{60}$. Dieser Betrag entspricht genau der Ersparnis beim Kauf der drei ermäßigten Hüte. Das ergibt die Gleichung $\frac{47x}{60}=3\cdot 9{,}4$. Daraus folgt $x=\frac{3\cdot 9{,}4\cdot 60}{47}=36$.

20. p, q und r sind positive ganze Zahlen mit $p+\dfrac{1}{q+\frac{1}{r}}=\dfrac{25}{19}$. Dann ist der Wert des Produktes pqr gleich

(A) 6 (B) 10 **(C) 18** (D) 36 (E) 42

$\frac{25}{19}=1+\frac{6}{19}$, also gilt p = 1 und $q+\frac{1}{r}=\frac{19}{6}=3+\frac{1}{6}$. Daraus folgt q = 3, r = 6 und letztlich $pqr = 1\cdot 3\cdot 6 = 18$

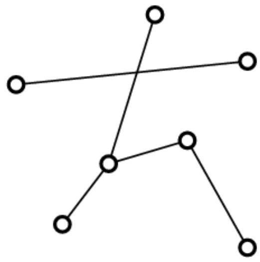
- 5 Punkte Beispiele -

21. In der Gleichung $N\times U\times(M+B+E+R)=33$ steht jeder Buchstabe für eine andere Ziffer (0, 1, 2, …, 9). Auf wie viele verschiedene Arten können die Buchstaben durch unterschiedliche Ziffern ersetzt werden?

(A) 12 (B) 24 (C) 30 **(D) 48** (E) 60

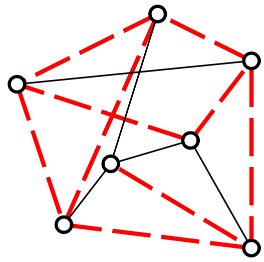
Die Zahl 33 enthält den Primfaktor 11. Wegen N, $U < 10$ gilt also $11 = M+B+E+R$ und $N\cdot U=3$.
Daher werden die Ziffern 1 und 3 für die Buchstaben N und U verwendet (2 Möglichkeiten).
Weil die Buchstaben durch unterschiedliche Ziffern zu ersetzen sind, stehen nach Bestimmung von N und U für die restlichen vier Buchstaben M, B, E und R nur mehr die Ziffern 0, 2, 4, 5, 6, … zur Verfügung, die größte dieser vier Zahlen muss also mindestens 5 sein. Weil aber schon 0 + 2+ 4 +5 = 11 gilt, folgt aus $11 = M+B+E+R$, dass genau die vier Ziffern 0, 2, 4, und 5 für die Buchstaben M, B, E und R einzusetzen sind. Dafür gibt es $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ Möglichkeiten. In Verbindung mit den 2 Möglichkeiten für die Auswahl von N und U können die Buchstaben also auf $2\cdot 24 = 48$ Arten durch unterschiedliche Ziffern ersetzt werden.

22. In der Abbildung möchte Karl Verbindungsstrecken zwischen je zwei markierten Punkten hinzufügen, sodass von jedem der sieben markierten Punkte dieselbe Anzahl von Verbindungen zu den anderen markierten Punkten geht.
Wie viele Verbindungsstrecken muss er mindestens zeichnen?

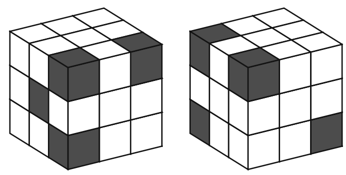


(A) 4 (B) 5 (C) 6 **(D) 9** (E) 10

Wird jeder der sieben markierten Punkte mit *n* anderen markierten Punkten verbunden, dann gibt es 7*n* Verbindungsstrecken. Jede dieser Strecken verbindet genau 2 Punkte, daher muss
n gerade sein. Weil es in der gegebenen Abbildung einen Punkt gibt, der schon mit 3 anderen Punkten verbunden ist, muss n ≥ 4 sein. Die Abbildung zeigt, dass das durch Einzeichnen von 9 Strecken möglich ist.

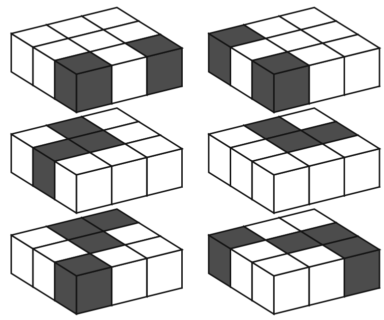


23. In der Abbildung sieht man denselben 3 × 3 × 3 Würfel von zwei verschiedenen Seiten. Der Würfel besteht aus 27 kleinen Würfeln, die entweder schwarz oder weiß sind. Wie viele kleine schwarze Würfel gibt es höchstens?



(A) 5 (B) 7 (C) 8 **(D) 9** (E) 10

Unter den 8 Würfeln in den Ecken des 3 × 3 × 3 Würfels gibt es ein nur genau ein Paar weißer Würfel, das an den Enden einer Raumdiagonale des Würfels liegt (linke Abbildung: rechts unten, links oben; rechte Abbildung: vorne unten, hinten oben). An den Enden des anderen drei Raumdiagonalen liegt jeweils mindestens ein schwarzer Würfel (linke Abbildung: rechte Seitenfläche; rechte Abbildung: linke Seitenfläche). Zwei schwarzen „Eckwürfeln" liegt ein weißer Eckwürfel gegenüber (siehe linke Abbildung), darüber hinaus gibt es eine Raumdiagonale des 3 × 3 × 3 Würfels mit zwei schwarzen Würfeln an den Enden (rechte Abbildung). Daher ist der in der linken Abbildung nicht sichtbare Würfel in der hinteren unteren Ecke schwarz, und die rechte Abbildung zeigt gegenüber der linken Abbildung eine um 90° um eine senkrechte Achse verdrehte Ansicht des 3 × 3 × 3 Würfels.
Von den 9 kleinen Würfeln der obersten Schicht sind 2 schwarz und 7 weiß. Alle sind in beiden Ansichten sichtbar.
Von den Würfeln in der mittleren und der unteren Schicht sind in jeder der beiden Ansichten genau 5 sichtbar, jeweils 7 der 9 Würfel in jeder der beiden Schichten sind in mindestens einer Ansicht sichtbar.
In der mittleren Schicht ist von diesen da oder dort sichtbaren Würfeln nur einer schwarz, 6 sind weiß. Daher enthält die mittlere Schicht höchstens 3 schwarze Würfel.
In der unteren Schicht sieht man in mindestens einer Ansicht 5 weiße und 2 schwarze Würfel; der in der linken Ansicht sichtbare (vorn liegende) schwarze Würfel liegt in der rechten Ansicht links. Daher sind höchstens 4 Würfel der untersten Schicht schwarz. Daher gibt es höchstens 9 schwarze Würfel.



24. Auf einer Insel sind Frösche entweder grün oder blau. Die Anzahl der blauen Frösche nimmt um 60% zu, während die Anzahl der grünen um 60% abnimmt. Das hat zur Folge, dass dann das neue Verhältnis der Anzahl der blauen zur Anzahl der grünen Frösche mit dem ursprünglichen Verhältnis der Anzahl der grünen zur Anzahl der blauen Frösche übereinstimmt. Um wie viel Prozent hat sich die Gesamtanzahl der Frösche geändert?

(A) 0% **(B) 20%** (C) 30% (D) 40% (E) 50%

Wir bezeichnen die ursprüngliche Anzahl der blauen Frösche mit *b*, die ursprüngliche Anzahl der grünen Frösche mit *g*.
Nach der Veränderung gibt es 1,6·*b* blaue Frösche und 0,4·*g* grüne Frösche, und es gilt $\frac{1{,}6\cdot b}{0{,}4\cdot g}=\frac{g}{b}$, also $g^2=4b^2$ und daher $g=2b$.
Damit war die Gesamtanzahl aller Frösche ursprünglich $3b$. Sie ändert sich auf $1{,}6b+0{,}4g=1{,}6b+0{,}8b=2{,}4b$, nimmt also um $0{,}6b$, also 20% ab.

25. Tom hat einige verschiedene positive ganze Zahlen aufgeschrieben, die kleiner als 101 sind. Ihr Produkt ist nicht durch 18 teilbar. Wie viele Zahlen konnte er höchstens aufschreiben?

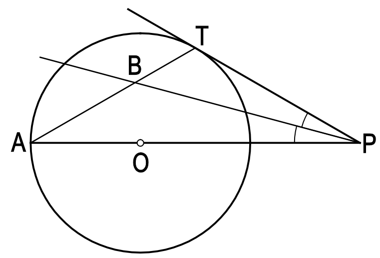
(A) 5 (B) 17 **(C) 68** (D) 69 (E) 90

Schreibt Tom nur ungerade positive ganze Zahlen kleiner als 101 auf, dann ist das Produkt dieser Zahlen ungerade und nicht durch 18 teilbar. So könnte er höchstens 50 Zahlen aufschreiben; die 51. Zahl wäre gerade und ergäbe zusammen mit der dann notwendigerweise schon ausgewählten ungeraden Zahl 9 ein durch 18 teilbares Produkt.
Darüber hinaus lässt sich ein durch 18 teilbares Produkt auch dadurch vermeiden, dass er zunächst keine Zahl anschreibt, die durch 3 teilbar ist. Von den 100 in Betracht kommenden positiven ganzen Zahlen kleiner als 100 sind 33 (nämlich $3 = 1 \cdot 3$, $6 = 2 \cdot 3$, …, $99 = 33 \cdot 3$) durch 3 teilbar, die übrigen 67 sind es nicht. Neben diesen 67 Zahlen kann Tom noch genau eine durch 3, aber nicht durch 9 teilbare Zahl aufschreiben, ohne dass sich ein durch 18 teilbares Produkt ergibt. Daher kann er höchstens 68 Zahlen aufschreiben.

26. Je drei Eckpunkte eines Würfels bilden ein Dreieck. Wie viele solche Dreiecke gibt es, deren Eckpunkte nicht alle derselben Seitenfläche des Würfels angehören?

(A) 16 (B) 24 **(C) 32** (D) 40 (E) 48

Jedes derartige Dreieck hat entweder zwei Eckpunkte in der Basisfläche des Würfel und einen in der Deckfläche (Typ 1) oder eine Ecke in der Basis und zwei Ecken in der Deckflächen (Typ 2). Von beiden Arten gibt es gleich viele, weil es zu jedem Dreieck der ersten Art ein symmetrisch liegendes der zweiten Art gibt.
Wir betrachten Dreiecke mit 2 Ecken in der Basis (Typ 1). Sind die beiden Ecken Endpunkte einer Würfelkante, so kann der dritte Eckpunkt nur einer der beiden Endpunkte der gegenüber liegenden Würfelkante sein. Es gibt also genau zwei Möglichkeiten für jede der vier Basiskanten, also 8 derartige Dreiecke. Sind die beiden Ecken Endpunkte einer der zwei Diagonale der Basis, so kann als dritter Eckpunkt jede der vier Ecken der Deckfläche gewählt werden. Daher gibt es auch 8 derartige Dreiecke.
Somit gibt es 16 Dreiecke vom Typ 1 und 16 Dreiecke vom Typ 2, also insgesamt 32 Dreiecke, deren Eckpunkte nicht alle derselben Seitenfläche des Würfels angehören.



27. *PT* ist die Tangente an einen Kreis mit Mittelpunkt *O*, und *PB* ist die Winkelsymmetrale des Winkels *TPA* (siehe Abbildung).
Wie groß ist der Winkel *TBP*?

(A) 30° **(B) 45°** (C) 50° (D) 75° (E) Das hängt von der Lage des Punktes *P* ab.

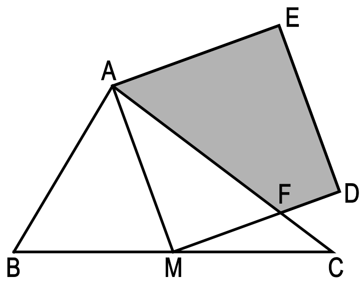
Es sei $\angle TPA = 2\alpha$. Weil die Tangente *TP* normal zu Berührradius *OT* steht, folgt daraus $\angle POT = 90° - 2\alpha$, $\angle TOA = 90° + 2\alpha$. Weil das Dreieck ATO gleichschenkelig ist, folgt daraus $\angle OAT = \angle ATO = 45° - \alpha$ und $\angle BTP = \angle ATP = \angle ATO + \angle OTP = 45° - \alpha + 90° = 135° - \alpha$. Über die Winkelsumme im Dreieck *BTP* ergibt sich schließlich $\angle TBP = 45°$.

28. Wir betrachten die Menge aller siebenstelligen Zahlen, die man erhält, wenn man für jede Zahl alle Ziffern von 1 bis 7 verwendet. Wir schreiben diese Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an und teilen diese Liste genau in der Mitte, sodass zwei gleich große Zahlenmengen entstehen. Wie lautet die letzte Zahl der ersten Menge dieser sortierten Liste?

(A) 1234567 (B) 3765421 (C) 4123567 (D) 4352617 **(E) 4376521**

Unter den betrachteten siebenstelligen Zahlen gibt es gleich viele mit den Anfangsziffern 1 und 7, 2 und 6 sowie 3 und 5. Daher hat die gesuchte Zahl die vorderste Ziffer 4. Unter den betrachten siebenstelligen Zahlen mit vorderster Ziffer 4 gibt es wieder gleich viele mit zweiter Ziffer 1 und 7, 2 und 6 sowie 3 und 5. Daher ist die gesuchte Zahl die größte mögliche Zahl, die mit der Ziffernfolge 43 beginnt, also 4376521.

29. Im Dreieck ABC ist $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm und $BC = 10$ cm. M ist der Mittelpunkt der Seite BC. $AMDE$ ist ein Quadrat und MD schneidet AC im Punkt F.
Wie groß ist die Fläche des Vierecks $AFDE$ in cm^2?



(A) $\frac{124}{8}$ **(B) $\frac{125}{8}$** (C) $\frac{126}{8}$ (D) $\frac{127}{8}$ (E) $\frac{128}{8}$

Wegen $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 100$ ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck. Daher ist M zugleich Umkreismittelpunkt, also gilt $MA = MB = MC = \frac{1}{2} \cdot BC = 5$ cm. Daher ist das Dreieck ACM gleichschenklig, und das Dreieck MFA ist wegen $\angle MAF = \angle ACM$, $\angle FMA = \angle BAC = 90°$ ist ähnlich zum Dreieck ABC.
Daraus folgt
$MF : MA = AB : AC$, also $MF = \frac{MF \cdot MB}{AC} = \frac{5 \cdot 6}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$.
Damit erhalten wir als Flächeninhalt der Dreiecks AMF $\frac{15}{4} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{75}{8}$ cm².
Weil $AMDE$ eine Fläche von 25 cm² hat, hat das Viereck $AFDE$ eine Flächen von $\frac{125}{8}$ cm².

30. 2014 Personen stehen nebeneinander in einer Reihe. Jede Person ist entweder ein Lügner (der immer lügt) oder ein Ritter (der immer die Wahrheit sagt).
Jede Person sagt: „Links von mir stehen mehr Lügner als rechts von mir Ritter stehen."
Wie viele Lügner stehen in dieser Reihe?

(A) 0 (B) 1 **(C) 1007** (D) 1008 (E) 2014

Am linken Ende der Reihe steht sicher ein Lügner. Er lügt, da links von dieser Person niemand steht, sodass keinesfalls mehr Lügner links von dieser Person als Ritter rechts von dieser Person stehen können.
Damit steht am rechten Ende der Reihe ein Ritter. Er sagt die Wahrheit, denn während rechts von dieser Person niemand, also sicher kein Ritter steht, steht links mindestens der eine Lügner am linken Ende der Reihe.
Damit steht als zweite Person von links wieder ein Lügner. Er lügt, weil dem einen Lügner zur Linken mindestens ein Ritter zur Rechten gegenüber steht.
Folglich sagt auch die zweite Person von rechts die Wahrheit: Zwei Lügnern zur Linken steht ein Ritter zur Rechten gegenüber.
Analog lässt sich Schritt für Schritt begründen, dass je einem Lügner auf der linken Seite ein Ritter auf der rechten Seite gegenübersteht. Somit sind genau die Hälfte aller Personen Lügner, also stehen 1007 Lügner in der Reihe.