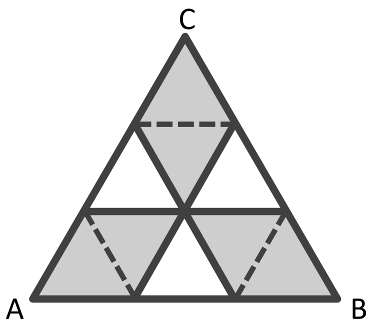
Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Kadett (7./8. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

LÖSUNGEN

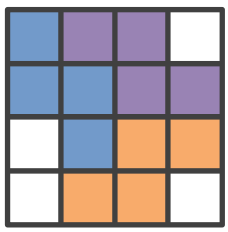
- 3 Punkte Beispiele -



1. Unterteilt man die grau gefärbten Teile des Dreiecks parallel zu den Dreiecksseiten (⇨ strichliert), erkennt man schnell, dass das große gleichseitige Dreieck ABC aus 9 kongruenten kleineren gleichseitigen Dreiecken besteht. Die drei grauen Flächen (= Rauten!) bedecken somit $\frac{6}{9}$ des großen Dreiecks ABC. Da $\frac{6}{9}$ von 9 = 6 gilt, folgt, dass Antwort D richtig ist.

2. Den zweiten Summanden bringt man durch Kürzen auf den gleichen Nenner und erhält dabei: $\frac{6666}{303} = \frac{2222}{101}$. Nun kann man weiter folgern, dass $\frac{3333}{101} + \frac{2222}{101} = \frac{5555}{101} = 5 \cdot \frac{1111}{101} = 5 \cdot 11 = 55$ gilt. Die richtige Lösung ist also D!

3. Zwischen Salz und Meerwasser besteht ein (Massen-)Verhältnis von 7 (kg) : 193 (kg); man kann sich überlegen, dass 193 kg ca. 5-Mal in 1000 kg Platz haben. Da es sich beim angegebenen Verhältnis um ein direkt proportionales handelt (je mehr Meerwasser, desto mehr Salz), muss auch die Masse des Salzes verfünffacht werden, was 7 kg · 5 = 35 kg ergibt. Dem Verhältnis 7 : 193 entspricht also (ungefähr) das Verhältnis 35 : 1000, womit A die richtige Antwort ist. Den kleinen Rundungsfehler kann man übrigens ruhig „in Kauf nehmen“, da ja alle anderen möglichen Lösungen weit von der gesuchten abweichen.
Exakt(er)es Verhältnis: $7 : 193 = \frac{7}{193} \cdot 1000 : \frac{193}{193} \cdot 1000 \approx 36{,}27 : 1000$

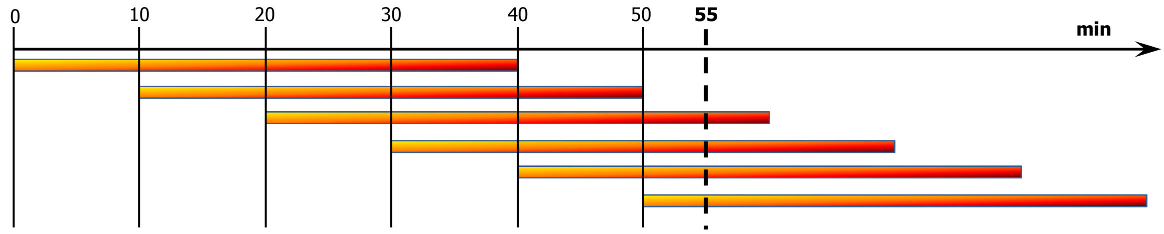


4. Wie Melanie ihre auszuschneidende Form auch dreht und wendet: Sie schafft es sicher nicht, mehr als drei dieser Figuren, die jeweils aus 4 kleinen Quadraten bestehen, aus dem großen quadratischen Stück Papier auszuschneiden (in der Abbildung siehst du eine solche Konstellation). Damit bleiben aber von den 4 · 4 = 16 Quadraten immer 4 übrig (16 – 3 · 4 = 4). Die richtige Lösung ist also C.

5. Wer sich hier nicht auf seine reine „Denkleistung“ verlassen will, formuliert eine Gleichung, in der die Unbekannte x die Anzahl der tatsächlich von Matthias gefangenen Fische darstellt: 3x = x + 12. Durch Umformen (auf beiden Seiten x subtrahieren!) erhält man zunächst 2x = 12 und weiters (nach dem Dividieren der linken und rechten Seite durch 2) x = 6. Matthias hat also 6 Fische gefangen und bei einer dreifachen „Ausbeute“ (3 · 6 = 18 Fische) wirklich um 12 Fische mehr, als er tatsächlich gefangen hat. Richtig ist somit Antwort B.

6. Ein besonderer „Glückpilz“ könnte natürlich bereits nach 2-maligem Ziehen z.B. zwei weiße Kugeln erwischt haben. Um aber garantiert zwei Kugeln derselben Farbe zu erwischen, muss man vom „worst-case-Szenario“ ausgehen, dass nämlich bei den ersten fünf Ziehungen lauter verschieden-farbige Kugeln dabei sind. Die Farbe der sechsten Kugel, die man dann aus dem Sack nimmt, muss – es gibt ja nur Kugeln in fünf verschiedenen Farben! – mit der Farbe einer zuvor gezogenen Kugel identisch sein. Einzig Lösung E ist somit richtig.
P.S.: Sicherlich ist dir auch aufgefallen, dass die richtige Lösung nicht von der Anzahl der Kugeln, sondern nur von der Anzahl unterschiedlicher Farben abhängt.

7. Alex entzündet bei seinem „Experiment" zunächst eine Kerze und in Minute 10 die zweite, in Minute 20 die dritte, in Minute 30 die vierte, in Minute 40 die fünfte und schließlich in Minute 50 die sechste Kerze.
Da aber in Minute 40 die zu allererst angezündete Kerze bereits wieder erlosch und in Minute 50 auch die zweite Kerze nach 40-minütiger Brenndauer abgebrannt war, brennen nach 55 Minuten von den 6 angezündeten Kerzen nur mehr 4. Noch klarer erkennt man natürlich die richtige Antwort C, wenn man sich die Situation auf einer Zeitleiste veranschaulicht – 55 Minuten nach dem Start brennen noch 4 Kerzen:



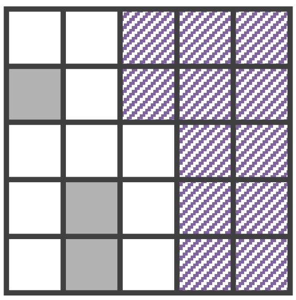
8. Kehrt man Maries Berechnung des arithmetischen Mittels um, muss ihr Ergebnis wieder mit 5 multipliziert werden. Nur im Fall C führt dies auf eine Zahl – nämlich $1{,}3 \cdot 5 = 6{,}5$ –, die nicht die Anzahl der im Dorf lebenden Kinder beschreiben kann.

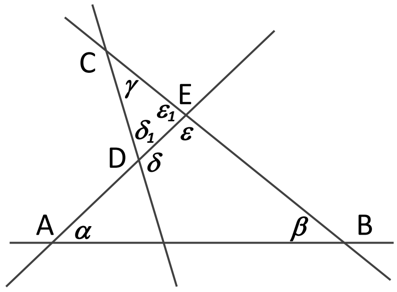
9. Zu beachten gilt es hier, dass Tom und Laura nicht von der gleichen Position starten, sondern dass Laura sozusagen eine halbe Brunnen-Umrundung Vorsprung hat. Bezeichnen wir die Anzahl der (vollen) Runden, die Laura um den Brunnen gelaufen ist, bis Tom sie zum ersten Mal einholt, mit x, so hat Tom in derselben Zeit $\frac{9}{8}$ dieser Wegstrecke hinter sich gebracht (direkt proportionaler Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Weg!); berücksichtigt man noch den eingangs erwähnten Vorsprung Lauras von einer halben Brunnen-Runde, ergibt sich folgender Zusammenhang: $\frac{9}{8} \cdot x = x + \frac{1}{2}$. Dieser lässt sich über $\frac{1}{8} \cdot x = \frac{1}{2}$ zu $x = 4$ umformen. Nach 4 vollen Runden wird Laura also von Tom (erstmals) überholt. Richtig ist daher Lösung A.
Natürlich hätte man sich diese Lösung auch so überlegen können: Tom schafft während Laura einmal um den Brunnen läuft, eine volle Brunnen-Umrundung und noch einmal ein $\frac{1}{8}$ davon. Nach vier (vollen) Runden von Laura holt Tom sie ein, weil er dann $\frac{1}{8}u + \frac{1}{8}u + \frac{1}{8}u + \frac{1}{8}u = \frac{4}{8}u = \frac{1}{2}u$ genau ihren Vorsprung wettgemacht hat.

10. Am schnellsten kommt man hier weiter, wenn man sich die einzelnen Primfaktor-Zerlegungen anschaut: $x \cdot y = 14 = 7 \cdot 2$, $y \cdot z = 10 = 2 \cdot 5$ und $z \cdot x = 35 = 5 \cdot 7$; relativ schnell wird klar, dass für $x = 7$, $y = 2$ und $z = 5$ alle drei Gleichungen erfüllt sind. Somit ergibt die Summe $x + y + z = 7 + 2 + 5 = 14$, wodurch sich Antwort C als korrekte Lösung entpuppt. Freilich gibt es auch noch andere Lösungsansätze, die aber – mit mehr Aufwand verbunden – auf das gleiche Ergebnis hinauslaufen.

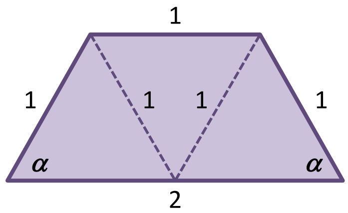
- 4 Punkte Beispiele -

11. Auf Grund der Vorgabe, dass Schiffe weder direkt benachbart noch diagonal benachbart sein dürfen, kommt für die Platzierung des (rechteckigen) 3×1 Schiffes nur die in der Abbildung schraffierte Fläche des 5×5-Rasters in Frage. Dabei ergeben sich 2 waagrechte und 6 senkrechte, zusammen also 8 Positionierungsmöglichkeiten. Antwort E ist die gesuchte.



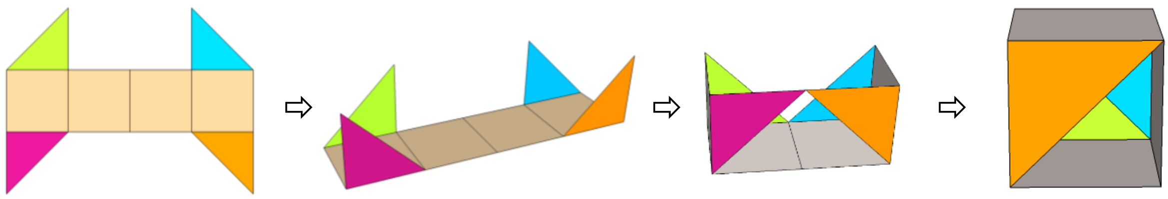


12. Die abgebildete Skizze ist leider nicht maßstabsgetreu. Mit dem GEO-Dreieck den Winkel δ zu messen, hilft uns daher nicht weiter; wir müssen uns der Lösung rechnerisch nähern:
Zunächst berechnet man sich über die Winkelsumme im Dreieck ABE den Winkel $\varepsilon = \angle AEB$: $\varepsilon = 180° - \alpha - \beta = 180° - 55° - 40° = 85°$; ε_1 ist zu ε supplementär, wodurch wir $\varepsilon_1 = 180° - \varepsilon = 180° - 85° = 95°$ erhalten.
Wieder über die Winkelsumme – jetzt aber im Dreieck CDE – ergibt sich für δ_1: $\delta_1 = \angle CDE = 180° - \gamma - \varepsilon_1 = 180° - 35° - 95° = 50°$; der gesuchte Winkel δ ist natürlich der Supplementär-Winkel zu Winkel δ_1: $\delta = 180° - \delta_1 = 180° - 50° = 130°$. Richtig ist daher Antwort E.



13. Laut Angabe ist für die Trapez-Form nur die in der Abbildung ersichtliche möglich: Die Basis ist 2 und die restlichen Seiten jeweils 1 lang: Es handelt sich also um ein so genanntes gleichschenkliges Trapez, in dem immer die zwei Winkel an der Basis gleich groß sind (gleiches gilt natürlich auch für die beiden gegenüberliegenden Winkel). Weil ja nach der Größe der beiden kleinsten Winkel gesucht ist, legen wir unser Augenmerk auf die beiden mit α bezeichneten spitzen Winkel an der Basis: Dazu verbindet man – wie in der Skizze durch strichlierte Linien angedeutet – die beiden oberen Ecken des Trapezes mit dem Mittelpunkt der Basis, und erkennt, dass sich unser Trapez aus drei gleichseitigen Dreiecken mit jeweils der Seitenlänge 1 zusammensetzt. Da in einem gleichseitigen Dreieck jeder Winkel immer 60° groß ist, wissen wir nun, dass für beide unserer gesuchten Winkel $\alpha = 60°$ und somit nur Antwort B gelten kann.

14. Mit etwas Phantasie und Vorstellungsvermögen – man muss ja immerhin Würfelnetze gedanklich falten! – kommt man drauf, dass Figur 3 (Antwort C) nicht zu einem Würfel gefaltet werden kann. Die „Spielverderber" hier sind die beiden dreieckigen Laschen, die in der Figur nach unten zeigen!
Spätestens dann, wenn man sich die einzelnen Faltvorgänge schrittweise veranschaulicht, sollte klar werden, dass sich die anfangs nach unten zeigenden Dreieckslaschen (pink & orange) schlussendlich überlappen und einen Blick in das Innere des (somit nicht vollständigen) Würfels gewähren:



15. Um zur richtigen Lösung zu gelangen, folgt man am besten einfach Willis Beispiel und schreibt „einige aufeinanderfolgende ganze Zahlen" auf und vergleicht dabei die Anzahl der ungeraden (rot & fett) zu den geraden (grün & kursiv) Zahlen:

Bsp. A: **3**; *4*; **5**; *6*; **7**; *8*; **9**; *10*; **11**; *12* bzw. *4*; **5**; *6*; **7**; *8*; **9**; *10*; **11**; *12*; **13** (Verhältnis ungerader zu geraden Zahlen ⇨ **5** : *5*)
Bsp. B: **3**; *4*; **5**; *6*; **7**; *8*; **9**; *10*; **11**; *12*; **13** (Verhältnis ungerader zu geraden Zahlen ⇨ **6** : *5*)
Bsp. C: *4*; **5**; *6*; **7**; *8*; **9**; *10*; **11**; *12*; **13**; *14* (Verhältnis ungerader zu geraden Zahlen ⇨ **5** : *6*)

Auf Grund der alternierenden (= abwechselnden) Reihenfolge von ungeraden und geraden Zahlen muss es in einer von Willi fabrizierten Zahlenreihe offensichtlich gleich viele ungerade wie gerade Zahlen geben (Bsp. A) oder eine ungerade mehr (Bsp. B) bzw. weniger (Bsp. C) als gerade Zahlen. – Die jeweilige Situation hängt natürlich von der „Start-" bzw. „Endzahl" ab!
Möchte man nun herausfinden, welcher der fünf angegebenen Werte *nicht* den berechneten Prozentsatz der ungeraden Zahlen in Willis Zahlenreihe angeben kann, ergänzt man am besten jeden gegebenen Prozentsatz durch jenen der geraden Zahlen und kürzt dieses „Verhältnis" so weit wie möglich, d. h. durch den größten gemeinsamen Teiler (ggT):

Lösungs-möglichkeit	Prozentsatz ungerader Zahlen	Prozentsatz gerader Zahlen	Verhältnis (ungerade : gerade)	ggT	vollständig gekürztes Verhältnis (ungerade : gerade)
A	40%	60%	40 : 60	20	2 : 3
B	45%	55%	45 : 55	5	**9 : 11**
C	48%	52%	48 : 52	4	12 : 13
D	50%	50%	50 : 50	50	1 : 1
E	60%	40%	60 : 40	20	3 : 2

Wie man sieht, kann nur Fall B (Prozentsatz ungerader Zahlen: 45%) nicht auf die oben herausgearbeitete Eigenschaft (gleich viele ungerade wie gerade bzw. Unterscheidung der Anzahl ungerader und geraden Zahlen um 1) zurückgeführt werden.

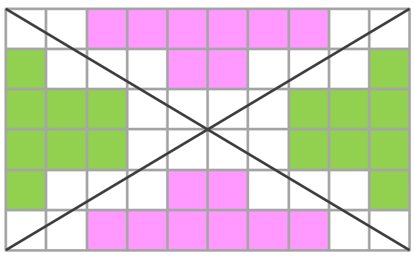
16. Da alle immer lügen, kann man aus Arons Aussage „Mein Stein hat dieselbe Farbe wie Bens Stein.“ folgern, dass sein und Bens Stein sich farblich unterscheiden. Dasselbe gilt auch für die Aussage von Ben („Mein Stein hat dieselbe Farbe wie Carls Stein.“): Auch sein Stein und der von Carl haben unterschiedliche Farbe.
Aus der Ungleichungskette „Farbe von Arons Stein ≠ Farbe von Bens Stein ≠ Farbe von Carls Stein“ lässt sich nun aber – auf Grund des Vorwissens, dass jeder von ihnen entweder einen roten oder grünen Stein besitzt – schließen, dass die Farbe von Arons und Carls Stein identisch sein muss. Schließlich klärt die (falsche) Aussage von Carl („Genau zwei von uns haben rote Steine.“) die ganze Lügengeschichte auf: Die zwei Steine von Aron und Carl müssen grün sein! Somit ist Antwort A richtig.

17. Für die Belegung der Tausender-Stelle kommen nur 1, 2 & 3 in Frage. Ist diese Position nun besetzt, so kann die Hunderter-Stelle von zwei der restlichen Ziffern und der Null, die jetzt „zugelassen“ ist, eingenommen werden. Sind die ersten beiden Stellen der vierstelligen Zahl nun besetzt, reduziert sich die Auswahlmöglichkeit für die Zehner-Stelle auf zwei Ziffern und nach deren Belegung muss die verbliebene Ziffer den Platz an der Einer-Stelle einnehmen: Insgesamt ergeben sich damit 3 · 3 · 2 · 1 = 18 unterschiedliche Konstellationen für die genannten Ziffern (in aufsteigender Reihenfolge):

1023		2013		3012
1032		2031		3021
1203	±693	2103	±702	3102
1230		2130		3120
1302		2301		3201
1320		2310		3210

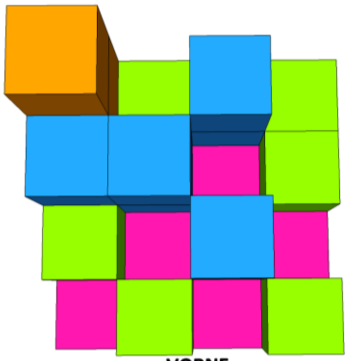
Ohne alle Differenzen zu berechnen: Die größten Differenzen ergeben sich logischerweise beim Wechsel der Tausender-Ziffer! Die größtmögliche ist demnach 702, also Antwort A.

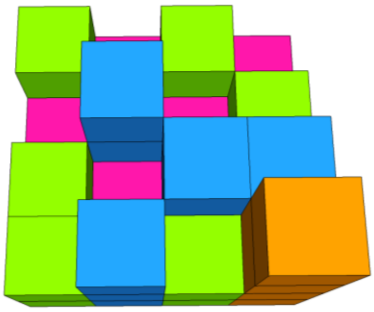
18. Am einfachsten kommen wir hier zur richtigen Lösung, indem wir auf kariertem Papier ein 10x6 Raster und dessen Diagonalen einzeichnen; anschließend zählen wir die nicht von den Diagonalen geschnittenen Kästchen ab: Sowohl im linken und rechten (grün eingefärbt) als auch im oberen und unteren (rosa eingefärbt) entstandenen Dreieck gibt es jeweils 8 „unberührte“ Zellen. In Summe macht das 32, was auf die Antwort E schließen lässt.

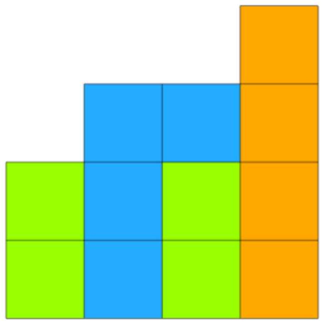


19. Vorab überlegt man sich, dass jenes Kind, das am 23. April 2000 geboren worden ist, am jüngsten sein muss. Die Information, dass sowohl Andi und Christa als auch Doris und Edi am selben Tag in verschiedenen Monaten geboren wurden, reicht aus, um Berti den Geburtstag 23.04.2000 zuordnen zu können. Somit ist die einzig mögliche Lösung die Antwort B.
P.S.: Wie wir sehen, sind die anfangs getätigten Aussagen „Andi und Edi haben im selben Monat Geburtstag.“ bzw. „Berti und Christa haben ebenfalls im selben Monat Geburtstag.“ für das Lösen der Aufgabe unwichtig!

20. Visualisiert man sich das Würfelturm-Gebilde (Türme gleicher Höhe sind in derselben Farbe dargestellt) und betrachtet es von vorne und auch von hinten aus der Vogelperspektive, so wird relativ rasch klar, dass Johann Bild C (vgl. „Ansicht von HINTEN“) sehen muss, wenn er von hinten auf die Türme schaut. Um ohne 3D-Visualisierung auf die richtige Lösung C zu stoßen, benötigt es schon einiges an Vorstellungskraft!


VORNE

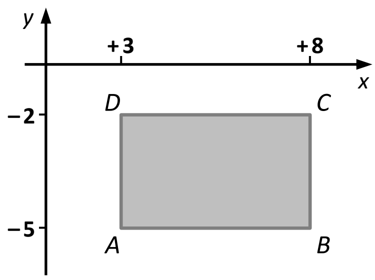

HINTEN


Ansicht von HINTEN

- 5 Punkte Beispiele -

21. Betrachtet man die Primfaktor-Zerlegung von 24 = 2 · 2 · 2 · 3, dann würde natürlich 2223 (und – unter Berücksichtigung des Vertauschungsgesetzes für die Multiplikation auch 2232, 2322 & 3222) die Auflage erfüllen, dass das Produkt der Ziffern 24 ergibt. Da wir aber nach der kleinsten Zahl suchen, die diese Eigenschaft hat, versuchen wir Teilprodukte der Primfaktor-Zerlegung von 24 (mit möglichst wenig Faktoren) zu bilden; dabei müssen wir darauf achten, dass keiner der Faktoren zweistellig ist, da z. B. zwar 24 = 2 · 12 gilt, das Produkt aus 212 aber nicht 24 liefert! 24 = 3 · 8 = 8 · 3 [⇨ 38 & 83] und 24 = 4 · 6 = 6 · 4 [⇨ 46 & 64]. Die kleinste Zahl, die also Ralf Karl nennen kann ist offensichtlich 38, deren Ziffernsumme 11 ergibt. Antwort E ist also die gesuchte!

22. Das Zuweisen konkreter (und realistischer) Koordinaten für die Punkte ABCD (vgl. Abb.) und dem Berechnen des angeführten Bruches führt hier sicher am schnellsten zum richtigen Ergebnis (A). Betrachten wir diese Aufgabe trotzdem auch allgemein: Es ist hilfreich, sich zunächst zu überlegen, dass das Rechteck ABCD vollständig im 4. Quadranten liegt. Für Punkte, die darin liegen gilt, dass die x-Koordinate immer positiv (x > 0), die y-Koordinate hingegen immer negativ (y < 0) ist. Folglich ist auch für die Eckpunkte des Rechtecks der Bruch $\frac{\text{y−Koordinate}}{\text{x−Koordinate}}$ sicherlich negativ; eine negative Zahl ist aber umso kleiner, je weiter links sie auf der Zahlengeraden liegt oder – anders gesagt – je größer ihr Betrag ist (Beispielsweise ist -9 kleiner als -3, da ja |-9| = 9 größer |-3| = 3 gilt.)! Da wir einen (negativen!) Bruch suchen, der möglichst klein ist, müssen wir müssen wir also einen Bruch finden, der dem Betrag nach möglichst groß ist; das ist aber genau dann der Fall, wenn der Betrag der y-Koordinate möglichst groß und die x-Koordinate möglichst klein wird.

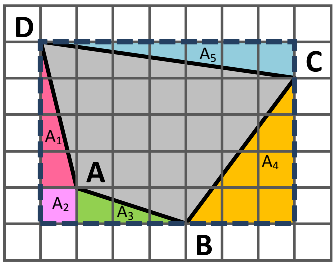


|y-Koordinate| ⇨ möglichst groß: Für A & B ist der Betrag der y-Koordinate [= Entfernung zur x-Achse] größer als der von D & C, die damit ausscheiden!

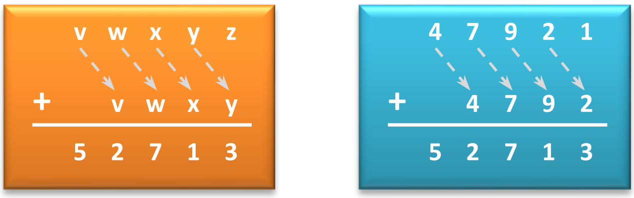
x-Koordinate ⇨ möglichst klein: Am nächsten zur y-Achse liegen A & D (sie haben also eine kleinere x-Koordinate als B & C).

Die dem Betrag nach größtmögliche y-Koordinate und zugleich kleinstmögliche x-Koordinate weist also der Eckpunkt A auf. Die korrekte Lösung ist daher (ebenfalls) A.

23. Die einfachste Methode, um in dieser Aufgabe ans Ziel zu gelangen, ist es, dem grau eingefärbten Viereck ein Rechteck umzuschreiben, dessen Seiten parallel zu den Raster-Linien verlaufen (s. Abb.). Zieht man die so entstandenen fünf „Randflächen“ (4 rechtwinklige Dreiecke & 1 Quadrat) von diesem Rechteck ab, erhält man die Fläche des gegebenen Vierecks:
$A_{grau} = A_{Rechteck} - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) = 10 \cdot 14 - (\frac{8\cdot 2}{2} + 2 \cdot 2 + \frac{6\cdot 2}{2} + \frac{6\cdot 8}{2} + \frac{14\cdot 2}{2}) =$
$= 140 - (8 + 4 + 6 + 24 + 14) = 140 - 56 = 84\ cm^2$. Die richtige Fläche ist also in Antwort B angegeben.



24. Der „Schlüssel“ zum Lösen dieser Aufgabe ist die Beobachtung, dass die Einerstelle der Summe (5271<u>3</u>) aus der vier- und fünfziffrigen Zahl ungerade ist, weshalb Robert in der ursprünglich fünfziffrigen Zahl die Einerziffer entfernt haben muss. – In allen anderen Fällen würden die vier- und fünfziffrige Zahl nämlich auf dieselbe Ziffer enden, deren Addition ausnahmslos eine gerade (!) Zahl liefern würde (s. linke Grafik). Mit etwas Tüfteln und Probieren kommt man relativ schnell zur richtigen Lösung (s. rechte Grafik). Die Ziffernsumme der ursprünglich fünfziffrigen Zahl ist demnach 4 + 7 + 9 + 2 + 1 = 23. Es stimmt also Lösung C.

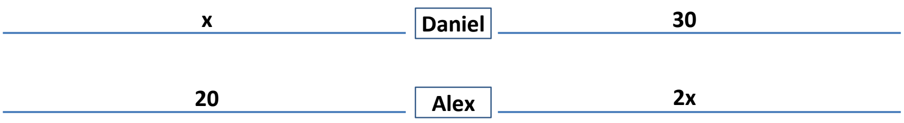


25. Symbolisieren wir einmal die zwanzig in einer Reihe stehenden Bäume mit Kreisen und nummerieren sie:

Da wir möglichst viele Eichen unterbringen wollen, beginnen wir – solange dies die Regel, dass zwischen zwei beliebigen Eichen nicht 3 Bäume stehen dürfen, erlaubt – Eichen (schwarz ausgefüllte Kreise) zu setzen:

Wir erkennen nun, dass an Position 5 keine Eiche mehr gepflanzt werden darf; sonst würde diese nämlich mit der Eiche an der 1. Stelle genau drei [beliebige] Bäume einschließen, was ja nicht zugelassen ist. Aus den gleichen Gründen stehen an den Positionen 6 bis 8 keine Eichen, sondern Linden. Setzt man dieses „Pflanzmuster“ fort, finden im Park 12 Eichen (und 8 Linden) Platz. Die Antwort C ist die gesuchte:

26. Man weiß: Alex beendete den Geländelauf an Position 21; somit lagen 20 seiner Konkurrenten vor ihm. Aus der Information, dass 1,5-mal so viele Läufer hinter Daniel wie vor Alex lagen, ist nun aber auch bekannt, dass 20 · 1,5 = 30 hinter Daniel lagen. Aus der ersten Aussage kann man schließen, dass die Anzahl der Läufer hinter Alex doppelt so groß sein muss (⇨ 2x) wie die Anzahl jener, die vor Daniel lagen (⇨ x). Schematisch dargestellt, schaut die Situation bis jetzt folgendermaßen aus:



Da Alex und Daniel ja am selben Rennen teilgenommen haben, muss sich die Anzahl in beiden dargestellten Ranglisten entsprechen: $x + 1 + 30 = 20 + 1 + 2x$. Durch Umformen erhält man $x = 10$, woraus man schließen kann, dass insgesamt 20 Läufer sich hinter Alex platzierten. Die Teilnehmerzahl betrug demnach 41 (Antwort B). Der Vollständigkeit halber sei hier noch erwähnt, dass Daniel als 11. – also 10 Läufer vor Alex – ins Ziel kam.

27. Setzen wir die Zahlenfolge zunächst einmal nach dem beschriebenen Bildungsprinzip fort (zur Verdeutlichung schreiben wir für eine positive 1 auch das Vorzeichen an):

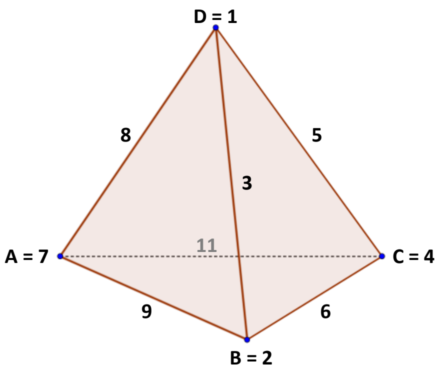
$\boxed{+1; -1; -1;}$ $\boxed{+1; -1; -1;}$ $\boxed{+1; -1; -1;}$ $\boxed{+1; -1; -1;}$ $\boxed{+1; -1; -1;}$ $\boxed{+1; -1; -1;}$ $\boxed{+1; -1; -1;}$ …

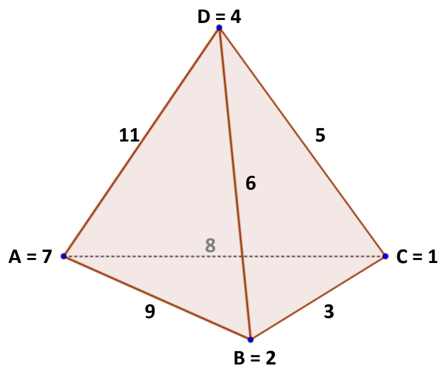
Wir sehen, dass sich die Vorzeichen der Einsen nach einem periodischen Muster (+ | – | –) wiederholen. Damit ist aber auch sofort klar, dass die Summe eines einzelnen Dreier-Blocks – 1 ergibt. Da die ersten 2013 Zahlen dieser Folge aber genau aus 2013 : 3 = 671 solcher 3er-Blöcke bestehen, muss – 1 insgesamt 671-mal addiert werden, was auf die Multiplikation (– 1) · 671 = – 671 hinausläuft. Das richtige Ergebnis ist also B.

28. Um nicht den Überblick zu verlieren, stellen wir uns vor, dass Papa seine Palatschinken übereinander auf einem Teller stapelt. Somit liegt immer das zuletzt entstandene – und somit heißeste – Omelett an oberster Stelle. Würde also Papa alle seine sechs Palatschinken ungestört backen können, so läge der in der Abbildung gezeigte Fall vor: Die Kinder starten erst nach dem Entstehen des sechsten Pfannkuchens mit dem Verzehr und essen sich dann bis zum ersten durch (6 ⇨ 5 ⇨ 4 ⇨ 3 ⇨ 2 ⇨ 1; vgl. E). Im Fall A – umgekehrte Reihenfolge – stürmen die Kinder immer unmittelbar nach dem Entstehen jeder einzelnen Palatschinke in die Küche und verspeisen sie umgehend (1 ⇨ 2 ⇨ 3 ⇨ 4 ⇨ 5 ⇨ 6). – Auch diese Situation ist also vorstellbar. Im Fall B werden Omelett 1 und 2 direkt nach ihrem jeweiligen Entstehen verzehrt; Papa produziert dann Nummer 3, 4 & 5, bis seine Kinder wieder der Hunger packt und sie diese der Reihe nach – noch vor dem Entstehen der 6. Palatschinke – essen (1 ⇨ 2 ⇨ 5 ⇨ 4 ⇨ 3 ⇨ 6). Auch der Fall C kann eintreten: Nach dem Entstehen der 3. Palatschinke verspüren die Kinder Heißhunger auf zwei Palatschinken, kehren erneut nach dem Backen zweier weiterer Pfannkuchen (4 & 5) zurück, verspeisen diese und verlassen wieder die Küche. Erst nach dem Fertigstellen der letzten Palatschinke suchen sie erneut die Küche auf, um sich zunächst das (heißere) sechste und schließlich das mittlerweile schon etwas abgekühlte erste Omelett zu „genehmigen“ (3 ⇨ 2 ⇨ 5 ⇨ 4 ⇨ 6 ⇨ 1).

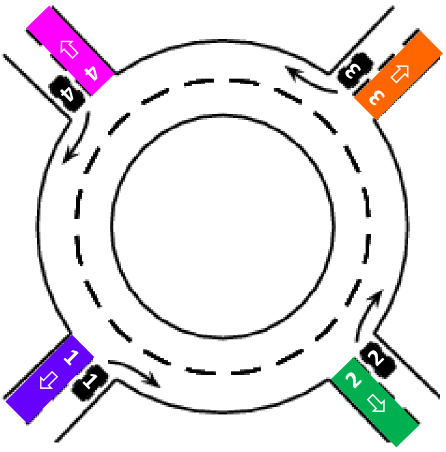
Fall D, den wir noch nicht untersucht haben, muss also jene Reihenfolge angeben, in der die Palatschinken nicht gegessen worden sein können. – Wir überlegen uns: Offensichtlich stillen Papas Schützlinge ihre Lust auf Pfannkuchen erst nachdem bereits Nummer 4 gebacken worden ist. Sie verspeisen nur die heißeste (= vierte) Palatschinke, verlassen wieder die Küche und wiederholen dieses „Ritual“ auch für Nummer 5 & 6. Auf dem Teller muss aber nun an oberster Stelle die 3. (und nicht die 2.) Palatschinke liegen, die von den verbleibenden Pfannkuchen auch noch am heißesten ist; die Folge 4 ⇨ 5 ⇨ 6 ⇨ <u>2</u> ⇨ <u>3</u> ⇨ 1 (Antwort D) kann nicht stimmen.

29. Ausgehend von der Kante AB, belegt man deren Eckpunkte A und B mit den möglichen Zerlegungen von 9 (1 + 8; 2 + 7; 3 + 6; 4 + 5). Bis auf A = 7 und B = 2 führen alle Kombinationen früher oder später zu einem Widerspruch. Da die höchste Zahl 11 nicht an einem der Eckpunkte des Tetraeders platziert werden darf (jede Addition von 11 und einer noch zur Verfügung stehenden Zahl würde eine Summe größer 11 ergeben!), setzen wir sie an eine von A ausgehende Kante: entweder AC (s. linke Abb.) oder AD (s. rechte Abb.). – Die Positionierung an einer von B ausgehenden Kante ist nicht möglich, da wir am gegenüberliegenden Eckpunkt die Zahl 9 (11 – 2) benötigen würden, die aber bereits vergeben ist. Das Verteilen der restlichen Zahlen ist nun nicht mehr ganz schwierig: Die Kante CD ist in beiden dargestellten mit der Zahl 5 markiert (Lösung B).
P.S.: Da 7 & 2 anfangs auch vertauscht platziert werden können, gibt es noch 2 weitere Tetraeder-Belegungen.





30. Um uns einen Überblick über die Situation zu verschaffen, nummerieren wir anfangs die Ausfahrten von 1 bis 4 und weisen gleichzeitig jedem der vier Autos, das aus der jeweiligen Ausfahrt in den Kreisverkehr einfährt dieselbe Zahl zu (s. Kreisverkehr-Grafik). Vorweg überlegen wir uns noch, dass alle Ausfahrten nur von einem Auto benutzt werden („… keine zwei Autos verlassen den Kreisverkehr bei derselben Ausfahrt.“) und kein Auto in jene Richtung den Kreisverkehr verlassen kann, aus der es in diesen einfuhr („Kein Auto fährt im Kreisverkehr eine ganze Runde …“).
Auto 1 muss den Kreisverkehr also über Ausfahrt 2, 3 oder 4 wieder verlassen – diese Situation siehst du in der 1. Spalte der Tabelle dargestellt. Im Fall, dass Auto 1 die Abfahrt 2 benützt, gibt es auch für Auto 2 drei verschiedene Ausfahrtmöglichkeiten, nämlich 3, 4 & 1. Andernfalls reduzieren sich für Auto 2 die Auswahlmöglichkeiten den Kreisverkehr zu verlassen auf (jeweils) zwei Fälle, da es ja die „eigene“ Ausfahrt 2 nicht benutzen darf (⇨ 2. Spalte).
Mit Hilfe ähnlicher Überlegungen können nun auch noch die verbleibenden Arten der Ausfahrtmöglichkeiten für Auto 3 (⇨ 3. Spalte) und Auto 4 (⇨ 4. Spalte) aufgelistet werden. Insgesamt können neun unterschiedliche Konstellationen eintreten. Richtig ist daher Lösung A.



	1	2	3	4	Fälle
Ausfahrt	2	3	1	4	
			4	1	1.
		4	1	3	2.
		1	4	3	3.
	3	4	1	2	4.
			2	1	5.
		1	4	2	6.
			2	4	
	4	3	1	2	7.
			2	1	8.
		1	2	3	9.