# KÄNGURU DER MATHEMATIK 2011
# 17.3.2011

## Kategorie: Student, Schulstufe: 11-13

| | |
|---|---|
| Name: | |
| Schule: | |
| Klasse: | |

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21.-30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

**Bitte die Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

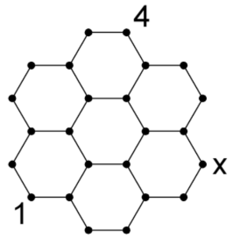
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2011“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50% der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at. bzw. http://kaenguru.diefenbach.at/ verwendet werden.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2013 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen.
Nach dem 31. Dezember 2013 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

Unterschrift:

# Känguru der Mathematik 2011
# Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
# Österreich - 17.3.2011

**- 3 Punkte Beispiele -**




**1)** Im Bild soll zu jedem Punkt eine Zahl gesetzt werden. Die Summe der Zahlen an den Endpunkten jeder Sechseckseite soll gleich sein. Zwei Zahlen stehen schon im Bild. Welche Zahl steht an der Stelle des x?

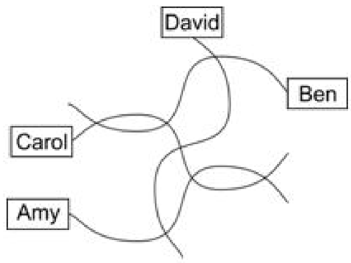
**A)** 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 24

**2)** Drei Rennfahrer nehmen an einem Formel-1-Rennen teil: Michael, Fernando und Sebastian. Vom Start weg führt Michael vor Fernando und dieser liegt vor Sebastian. Im Verlauf des Rennens überholen einander Michael und Fernando 9 Mal, Fernando und Sebastian 10 Mal und Michael und Sebastian 11 Mal. In welcher Reihenfolge beenden die drei das Rennen?

**A)** Michael, Fernando, Sebastian **B)** Fernando, Sebastian, Michael **C)** Sebastian, Michael, Fernando
**D)** Sebastian, Fernando, Michael **E)** Fernando, Michael, Sebastian

**3)** Wenn $2^x = 15$ und $15^y = 32$ gilt, dann ist xy gleich

**A)** 5 **B)** $\log_2 15 + \log_{15} 32$ **C)** $\log_2 47$ **D)** 7 **E)** $\sqrt{47}$

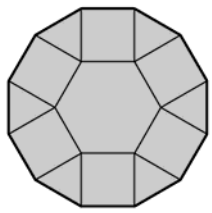


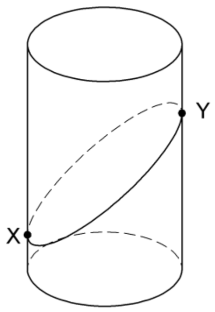

**4)** Jan kann nicht sehr genau zeichnen, aber er hat trotzdem versucht, eine Straßenkarte seines Dorfes anzufertigen. Die relativen Lagen der Häuser und der Straßenkreuzungen stimmen alle, aber drei Straßen sind in Wirklichkeit gerade, nur die Qurwikgasse ist es nicht. Wer wohnt in der Qurwikgasse?

**A)** Amy **B)** Ben **C)** Carol **D)** David **E)** Es kann aus der Zeichnung nicht entschieden werden.

**5)** Alle vierstelligen Zahlen mit der Ziffernsumme 4 werden in fallender Reihenfolge angeschrieben. An wievielter Stelle befindet sich die Zahl 2011?

**A)** 6. **B)** 7. **C)** 8. **D)** 9. **E)** 10.



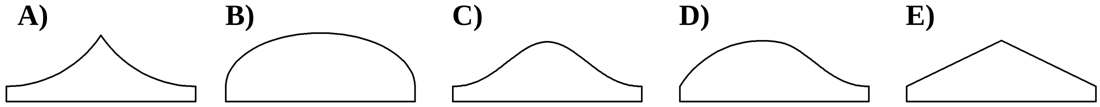


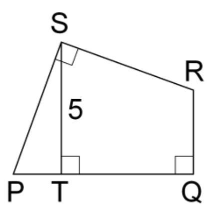

**6)** Gegeben sind ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 1, sechs Quadrate und sechs gleichseitige Dreiecke wie abgebildet. Wie groß ist der Umfang dieser Figur?

**A)** $6(1+\sqrt{2})$ **B)** $6\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **C)** 9 **D)** $6+3\sqrt{2}$ **E)** 12

**7)** Ein rechteckiges Blatt Papier wird um einen Zylinder gewickelt. Anschließend wird ein schräger ebener Schnitt des Zylinders wie abgebildet durch die beiden Punkte X und Y durchgeführt. Der untere Teil des Papiers wird dann wieder abgewickelt. Welchges der folgenden Bilder könnte das Ergebnis darstellen?

**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**






**8)** Bestimme die Fläche des abgebildeten Vierecks PQRS, in dem PS = RS, $\angle PSR = \angle PQR = 90°$, $ST \perp PQ$, und ST = 5 gilt.

**A)** 20 **B)** 22,5 **C)** 25 **D)** 27,5 **E)**30

**9)** Andrew schrieb alle ungeraden Zahlen von 1 bis 2011 auf eine Tafel. Bob hat dann alle Vielfachen von drei wieder gelöscht. Wie viele Zahlen verblieben auf der Tafel?

**A)** 335 **B)** 336 **C)** 671 **D)** 1005 **E)** 1006

**10)** Max und Hugo würfeln mit einigen Spielwürfeln um festzustellen, wer als erster in den kalten See springt. Wenn es keine Sechser gibt, springt Max. Wenn es eine Sechs gibt, springt Hugo, und wenn es mehrere Sechser gibt, werden sie beide nicht hineinspringen. Wie viele Würfel müssen sie verwenden, wenn die Wahrscheinlichkeit des Hineinspringens für beide gleich groß sein soll?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 17

**- 4 Punkte Beispiele -**

**11)** Ein Rechteck wird in drei kleine Rechtecke zerteilt. Eines davon hat die Maße 7 mal 11. Ein weiteres hat die Maße 4 mal 8. Bestimme die Maße des dritten Rechtecks, wenn seine Fläche maximal sein soll.

**A)** 1 mal 11 **B)** 3 mal 4 **C)** 3 mal 8 **D)** 7 mal 8 **E)** 7 mal 11

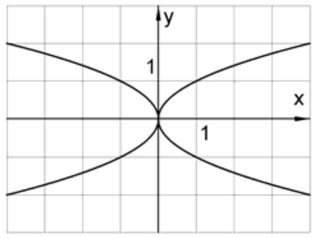
**12)** Michael möchte ganze Zahlen so in die leeren Felder der abgebildeten 3×3 Tabelle einfügen, dass die Summe der Zahlen in jedem 2×2 Quadrat gleich 10 ist. Vier Zahlen stehen schon in der Tabelle. Welche der folgenden Werte könnte die Summe der restlichen fünf sein?

| | | |
|---|---|---|
| | 2 | |
| 1 | | 3 |
| | 4 | |

**A)** 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 13 **E)** Keine dieser Zahlen ist möglich.

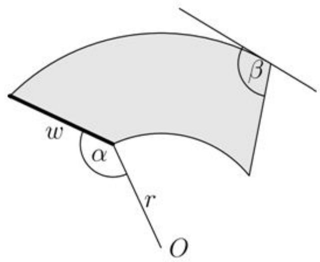
**13)** 48 Kinder fahren auf einen Skiausflug. Sechs davon fahren mit genau einem Geschwisterteil, neun fahren mit genau zwei Geschwistern, und vier fahren mit genau drei. Die restlichen Kinder fahren ohne Geschwister. Wie viele Familien waren am Ausflug unterwegs?

**A)** 19 **B)** 25 **C)** 31 **D)** 36 **E)** 48



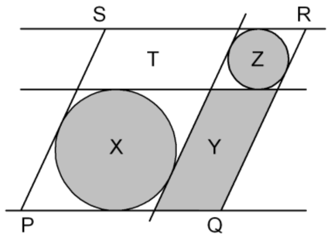

**14)** Wie viele Graphen der Funktionen $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = +\sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = +\sqrt{|x|}$, $y = -\sqrt{|x|}$sind in dieser Figur inkludiert?

**A)** keine **B)** 2 **C)** 4 **D)**6 **E)** alle 8




**15)** Der Heckscheibenwischer eines Autos ist so gebaut, dass die Stange r und das Wischerblatt w gleich lang sind und im Winkel α verbunden. Der Wischer dreht sich um das Zentrum O und wischt über den abgebildeten Bereich. Bestimme den Winkel β zwischen dem rechten Rand des gereinigten Bereichs und der Tangente des gekrümmten oberen Randes.

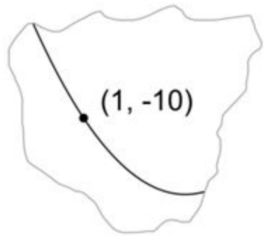
**A)** $\frac{3\pi-\alpha}{2}$ **B)** $\pi-\frac{\alpha}{2}$ **C)** $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ **D)** $\frac{\pi}{2}+\alpha$ **E)** $\pi+\frac{\alpha}{2}$




**16)** Wir kennen drei waagrechte Linien und drei parallele schräge Linien. Beide abgebildeten Kreise berühren jeweils vier dieser Linien. X, Y und Z sind die Flächen der grauen Bereiche. D ist die Fläche des Parallelogramms PQRS. Wie viele der Flächen X, Y, Z und D muss man mindestens kennen, um die Fläche des Parallelogramms T bestimmen zu können?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4
**E)** T kann nicht aus X, Y, Z und D bestimmt werden.

**17)** In der (x,y)-Ebene sind die Koordinatenachsen wie üblich positioniert. Es wurde der Punkt A(1, -10) auf der Parabel $y = ax^2 + bx + c$ gezeichnet. Danach wurden die Koordinatenachsen und ein Großteil der Parabel wieder gelöscht. Welche der folgenden Aussagen kann falsch sein?




**A)** $a > 0$ **B)** $b < 0$ **C)** $a + b + c < \mathbf{0}$ **D)** $b^2 > 4ac$ **E)** $c < 0$

**18)** Die Seiten AB, BC, CD, DE, EF und FA eines Sechsecks berühren alle einen gemeinsamen Kreis. Die Längen der Seiten AB, BC, CD, DE und EF sind der Reihe nach 4, 5, 6, 7 and 8. Wie lang ist die Seite FA?

**A)** 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6
**E)** Die Länge kann mit dieser Information nicht bestimmt werden.

**19)** Was ist der kleinstmögliche positive, ganzzahlige Wert des Ausdrucks $\frac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}$, wenn verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern ungleich 0 stehen und gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

**20)** Die Brüder Gerhard und Günther geben Auskunft über die Mitglieder ihres Schachklubs. Gerhard sagt: „Alle Mitglieder unseres Klubs sind männlich, mit fünf Ausnahmen.“ Günther sagt: „In jeder Gruppe von sechs Mitgliedern befinden sich mindestens vier weibliche Mitglieder.“ Wie viele Mitglieder hat der Schachklub?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 18

**- 5 Punkte Beispiele -**

**21)** In einer Trommel befinden sich Kugeln. Auf jeder Kugel steht eine andere positive ganze Zahl. Auf 30 Kugeln stehen Zahlen, die durch 6 teilbar sind, auf 20 Kugeln stehen Zahlen, die durch 7 teilbar sind, und auf 10 Kugeln stehen Zahlen, die durch 42 teilbar sind. Wie viele Kugeln sind mindestens in der Trommel?

**A)** 30 **B)** 40 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 60

**22)** Gegeben sind die beiden arithmetischen Folgen 5, 20, 35, … und 35, 61, 87,… . Wie viele verschiedene arithmetische Folgen positiver ganzer Zahlen haben beide Folgen als Teilfolgen?

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 26 **E)** unendlich

**23)** Die Funktionenfolge $f_1(x), f_2(x), \cdots$ erfüllt die Bedingungen $f_1(x) = x$ und $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1-f_{n(x)}}$.

Bestimme den Wert von $f_{2011}(2011)$.

**A)** 2011 **B)** $-\frac{1}{2010}$ **C)** $\frac{2010}{2011}$ **D)** 1 **E)** -2011

**24)** In einer Schachtel befinden sich rote und grüne Kugeln. Wenn wir zwei Kugeln zufällig aus der Schachtel entnehmen, sind sie mit der Wahrscheinlichkeit ½ von gleicher Farbe. Welche der folgenden Zahlen könnte die Anzahl der Kugeln in der Schachtel sein?

**A)** 81 **B)** 101 **C)** 1000 **D)** 2011 **E)** 10001

**25)** Eine Fluglinie verlangt für das Gepäck keine Gebühren, wenn es bei der Abwaage eine bestimmte Grenze nicht überschreitet. Für jedes weitere kg Gepäck wird eine Gebühr verlangt. Herr und Frau Raiss hatten 60 kg Gepäck und bezahlten 3 €. Herr Wander hatte ebenfalls 60 kg Gepäck, zahlte aber 10,50 €. Wie viel kg Gepäck werden pro Passagier gratis transportiert?

**A)** 10 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 39

**26)** Bestimme die Summe aller positiven ganzen Zahlen x kleiner als 100, sodass $x^2 - 81$ ein Vielfaches von 100 ist.

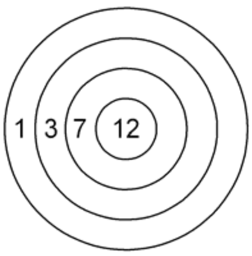
**A)** 200 **B)** 100 **C)** 90 **D)** 81 **E)** 50

**27)** Ein Bogenschütze übt seine Kunst auf dem abgebildeten Ziel. Mit jedem seiner 3 Pfeile trifft er immer ein Punktfeld. Wie viele verschiedene Punktesummen kann er dabei erreichen?

**A)** 13 **B)** 17 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 21

**28)** Es seien *a*, *b* und *c* positive ganze Zahlen, für die $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ gilt. Wie groß ist die Mindestanzahl der Teiler von $a \cdot b \cdot c$, wenn 1 und $a \cdot b \cdot c$ mitgezählt werden?

**A)** 30 **B)** 49 **C)** 60 **D)** 77 **E)** 1596




**29)** Zwanzig verschiedene positive ganze Zahlen werden in einer 4x5 Tabelle angeschrieben. Zwei Zahlen in Feldern, die eine gemeinsame Seite haben, haben immer einen gemeinsamen Teiler größer als 1. Bestimme den kleinstmöglichen Wert von n, wenn n die größte Zahl in der Tabelle sein soll.

**A)** 21 **B)** 24 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 40

**30)** Ein 3 × 3 × 3 Würfel ist aus 27 identischen kleinen Würfeln zusammengesetzt. Eine Ebene senkrecht zu einer Raumdiagonale des Würfels geht durch den Mittelpunkt des Würfels. Wie viele der kleinen Würfel werden von dieser Ebene geschnitten?

**A)** 17 **B)** 18 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 21