KÄNGURU DER MATHEMATIK 2009
23.3.2009

Kategorie: Student, Schulstufe: 11-13

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21.-30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte die Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2009
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 23.3.2009

- 3 Punkte Beispiele -

1) In einem Aquarium befinden sich 200 Fische. 1% davon sind blau, alle restlichen sind gelb. Wie viele gelbe Fische muss man aus dem Aquarium entnehmen, damit die blauen Fische 2% aller Fische sind?

A) 2 **B)** 4 **C)** 20 **D)** 50 **E)** 100

2) Welche der folgenden Zahlen ist am größten?

A) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ **B)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ **E)** $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

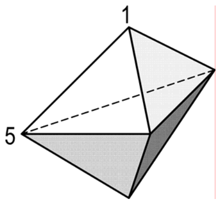
3) Für wie viele positive ganze Zahlen n ist die Zahl $n^2 + n$ eine Primzahl?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** für endlich viele, mehr als 2 **E)** für unendlich viele

4) Mari, Ville und Ossi gehen ins Kaffeehaus. Jeder von Ihnen konsumiert 3 Gläser Saft, 2 Eisbecher und 5 Kekse. Welcher Wert kann der Gesamtrechnungsbetrag sein?

A) € 39,20 **B)** € 38,20 **C)** € 37,20 **D)** € 36,20 **E)** € 35,20

5) Die Abbildung zeigt einen von 6 Dreiecken begrenzten Körper. In jedem Eckpunkt steht eine Zahl, wovon zwei eingezeichnet sind. Die Summe der Zahlen in den drei Eckpunkten jeder Seitenfläche ist gleich. Was ist die Summe aller fünf Zahlen?



A) 9 **B)** 12 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 24

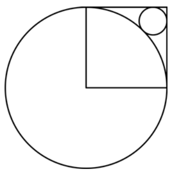
6) Die Kreise k_1 (mit Mittelpunkt M_1 und Radius 13) und k_2 (mit Mittelpunkt M_2 und Radius 15) schneiden einander in den Punkten P und Q. Die Länge der Strecke PQ beträgt 24. Welcher der folgenden Werte kommt als Länge der Strecke M_1M_2 in Frage?

A) 2 **B)** 5 **C)** 9 **D)** 14 **E)** 18

7) In einer Kiste befinden sich 2 weiße, 3 rote und 4 blaue Socken. Lisa weiß, dass ein Drittel der Socken löchrig sind, aber nicht welche Farbe die löchrigen Socken haben. Sie wählt zufällig Socken aus der Kiste, bis sie ein brauchbares Paar (also ein Paar ohne Löcher und mit gleicher Farbe) erhält. Wie viele Socken muss sie mindestens aus der Kiste nehmen, um ganz sicher ein brauchbares Paar zu erhalten?

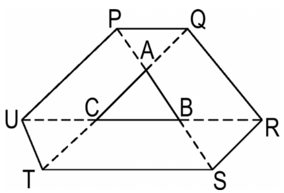
A) 2 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

8) Das Quadrat in der Abbildung hat die Seitenlänge 1. Der Radius des kleinen Kreises hat dann die Länge



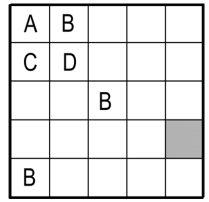
A) $\sqrt{2}-1$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D)** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

9) Die Seiten des Dreiecks ABC werden so bis P, Q, R, S, T und U verlängert, dass PA = AB = BS, TC = CA = AQ und UC = CB = BR gilt. Der Flächeninhalt von ABC ist 1. Wie groß ist der Flächeninhalt des Sechsecks PQRSTU?



A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 13 **E)** Der Wert ist nicht eindeutig.

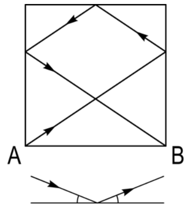
10) Im Raster wollen wir die Felder mit den Farben A, B, C und D so anmalen, dass benachbarte Felder immer verschiedene Farben haben. (Auch Felder mit einem gemeinsamen Eckpunkt gelten als benachbart.) Einige Felder sind schon gefärbt worden. Welche Farbe kann das graue Feld haben?



A) entweder A oder B **B)** nur C **C)** nur D
D) entweder C oder D **E)** A, B, C oder D

- 4 Punkte Beispiele -

11) Auf einem quadratischen Billardtisch mit der Seitenlänge 2 m wird eine (sehr kleine) Kugel vom Punkt A angestoßen. Nachdem sie auf der abgebildeten Bahn dreimal die Bande berührt, endet ihr Weg im Punkt B. Wie weit ist der von der Kugel zurückgelegte Weg von A nach B? (Bei der Bande gilt wie rechts abgebildet: Einfallswinkel = Ausfallswinkel.)

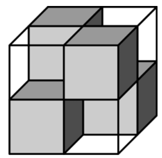


A) 7 **B)** $2\sqrt{13}$ **C)** 8 **D)** $4\sqrt{3}$ **E)** $2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

12) In einer Gruppe von 2009 Kängurus ist jedes entweder hell oder dunkel. Das kleinste der hellen Kängurus ist größer als genau 8 dunkle Kängurus. Ein helles ist größer als genau 9 dunkle, ein weiteres helles ist größer als genau 10 dunkle, und so weiter. Genau ein helles Känguru ist größer als alle dunklen Kängurus. Wie viele helle Kängurus gibt es?

A) 1000 **B)** 1001 **C)** 1002 **D)** 1003 **E)** Die beschriebene Situation ist unmöglich.

13) In der Abbildung sehen wir einen $2 \times 2 \times 2$ Würfel, der aus vier durchsichtigen $1 \times 1 \times 1$ Würfeln und vier nicht durchsichtigen schwarzen $1 \times 1 \times 1$ Würfeln zusammengesetzt ist. Diese sind so gelegt, dass der gesamte große Würfel nicht durchsichtig ist; man kann weder von vorne nach hinten, noch von rechts nach links, noch von oben nach unten an irgendeiner Stelle durch den großen Würfel hindurch sehen. Wie viele schwarze Würfel benötigt man mindestens in einem $3 \times 3 \times 3$ Würfel, um ihn auf diese Art undurchsichtig zu machen?



A) 6 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 18

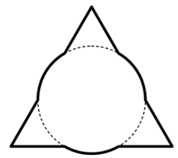
14) Auf der Insel der Edlen und der Lügner stehen 25 Personen in einer Schlange. Die Person an erster Stelle behauptet, dass alle hinter ihm Stehenden Lügner seien. Jeder der anderen behauptet, dass die Person vor ihm ein Lügner ist. Wie viele Lügner stehen tatsächlich in der Schlange? (Edle sagen immer die Wahrheit und Lügner lügen immer.)

A) 0 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 24 **E)** Es kann nicht festgestellt werden.

15) Bestimme die Einerziffer der Zahl $1^2 - 2^2 + \ldots - 2008^2 + 2009^2$.

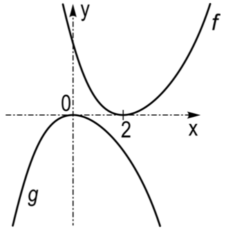
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

16) Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3 und ein Kreis mit Radius 1 haben den gleichen Mittelpunkt. Wie groß ist der Umfang der Figur, die man aus beiden gemeinsam erhält?



A) $6+\pi$ **B)** $3+2\pi$ **C)** $9+\frac{\pi}{3}$ **D)** 3π **E)** $9+\pi$

17) In nebenstehender Figur sehen wir die Funktionskurven der Funktionen f und g. Welche Beziehung besteht zwischen f und g?

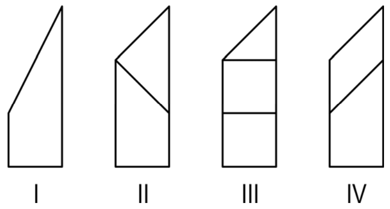


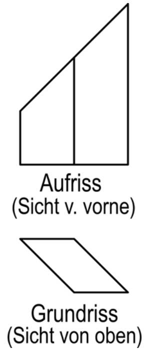
A) $g(x-2) = -f(x)$ **B)** $g(x) = f(x+2)$ **C)** $g(x) = -f(-x+2)$
D) $g(-x) = -f(-x-2)$ **E)** $g(2-x) = -f(x)$

18) 100 Studierende bekommen bei einer Prüfung 4 Fragen gestellt. 90 lösen die erste Aufgabe, 85 die zweite, 80 die dritte und 70 die vierte. Bestimme die kleinste mögliche Anzahl von Studierenden, die alle vier Aufgaben gelöst haben.

A) 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 30

19) In nebenstehender Figur sehen wir Grund- und Aufriss eines ebenflächig begrenzten Körpers (d.h. Ansichten von oben bzw. vorne). Welche der Figuren I bis IV kann einen Kreuzriss (d.h. Ansicht von links) desselben Objekts darstellen?





A) I **B)** II **C)** III **D)** IV **E)** keine davon

20) Im dargestellten „Zauberquadrat“ ist die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen gleich groß. Nur zwei Einträge sind sichtbar. Welche Zahl steht im Feld a?

a		
		47
	63	

A) 16 **B)** 51 **C)** 54 **D)** 55 **E)** 110

- 5 Punkte Beispiele -

21) Zwei Läufer laufen jeweils mit konstanter Geschwindigkeit Runden auf einer Rennbahn. Beide starten gleichzeitig an derselben Stelle. A läuft schneller als B, benötigt 3 Minuten für eine Runde und überholt B zum ersten Mal nach 8 Minuten. Wie lang benötigt B für eine Runde?

A) 6 min **B)** 8 min **C)** 4 min 30 sec **D)** 4 min 48 sec **E)** 4 min 20 sec

22) Es sei Z die Anzahl aller 8-ziffrigen Zahlen, die aus lauter verschiedenen Ziffern ungleich 0 bestehen. Wie viele dieser Zahlen sind durch 9 teilbar?

A) $\frac{Z}{8}$ **B)** $\frac{Z}{3}$ **C)** $\frac{Z}{9}$ **D)** $\frac{8Z}{9}$ **E)** $\frac{7Z}{8}$

23) Wie viele 10-ziffrige Zahlen gibt es, die nur aus den Ziffern 1, 2 und 3 zusammengesetzt sind, und bei denen sich benachbarte Ziffern immer um genau 1 unterscheiden?

A) 16 **B)** 32 **C)** 64 **D)** 80 **E)** 100

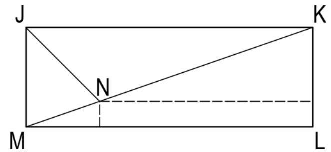
24) Für wie viele ganze Zahlen $n \geq 3$ existiert ein konvexes n-Eck, dessen Winkel im Verhältnis $1 : 2 : \ldots : n$ stehen?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** mehr als 5

25) 55 Schüler nehmen an einem Wettbewerb teil. Jede Aufgabe wird von der Jury mit „+“ gekennzeichnet, wenn sie richtig gelöst wurde, mit „–“, wenn sie falsch gelöst wurde, und mit „0“, wenn sie nicht in Angriff genommen wurde. Es stellte sich heraus, dass bei keinen zwei Schülern sowohl die Anzahl von „+“ als auch die Anzahl von „–“ übereinstimmte. Was ist die kleinste Zahl von Aufgaben, die beim Wettbewerb gestellt werden konnten?

A) 6 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

26) In einem Rechteck JKLM schneidet die Winkelsymmetrale in J die Strecke KM in N. Der Abstand von N zu LM ist 1 und der Abstand von N zu KL ist 8. Wie lang ist LM?



A) $8+2\sqrt{2}$ **B)** $11-\sqrt{2}$ **C)** 10 **D)** $8+3\sqrt{2}$ **E)** $11+\frac{\sqrt{2}}{2}$

27) Es gilt $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Wie viele mögliche reelle Werte gibt es für k?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 6

28) Die Zahlen 1, 2, 3, …, 99 werden in n Gruppen verteilt. Es gilt:
¤ Jede Zahl ist in genau einer Gruppe.
¤ In jeder Gruppe gibt es mindestens zwei Zahlen.
¤ Wenn sich zwei Zahlen in derselben Gruppe befinden, so ist ihre Summe nicht durch 3 teilbar.
Bestimme das kleinste n mit dieser Eigenschaft.

A) 3 **B)** 9 **C)** 33 **D)** 34 **E)** 66

29) Samantha geht mit ihren drei Schwestern ins Theater. Sie haben eine Loge mit vier Plätzen reserviert. Samantha kommt mit zwei ihrer Schwestern etwas früher an, und sie setzen sich hin, ohne aus die Sitznummern zu achten. Marie kommt etwas später und besteht darauf, auf genau dem Platz zu sitzen, für den sie eine Karte hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Samantha ihren Sitzplatz ändern muss, wenn nun auch jede Schwester, die aufstehen muss, darauf besteht, sich auf ihren zugewiesenen Sitz zu setzen?

A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

30) Eine Folge ganzer Zahlen ist definiert durch $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ und $a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$ für $n \geq 0$. Der Rest von a_{2009} bei Division durch 7 beträgt

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 5 **E)** 6